

Ετήσια Τεχνική Έκθεση

Έτος 2014



ΘΑΛΗΣ – Πολυτεχνείο Κρήτης

Πλατφόρμα προηγμένων μαθηματικών μεθόδων και λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών πεδίων (multi physics, multidomain) σε σύγχρονες υπολογιστικές αρχιτεκτονικές: Εφαρμογή σε προβλήματα Περιβαλλοντικής Μηχανικής και Ιατρικής (MATENVMED- MIS 379416)

Δράση 2.4

Μέθοδοι Μετασχηματισμού Φωκά



Περιεχόμενα

1	Σκοπός	3
1.1	Μέθοδος Φωκά για γραμμικά προβλήματα πολλαπλών πεδίων στις 1+1 διαστάσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης και χρονικά εξαρτώμενους συντελεστές	3
1.2	Μέθοδος Φωκά για γραμμικά προβλήματα πολλαπλών πεδίων στις 2 + 1 διαστάσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης	3
2	Μεθοδολογία	4
2.1	Μέθοδος Φωκά για γραμμικά προβλήματα πολλαπλών πεδίων στις 1+1 διαστάσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης και χρονικά εξαρτώμενους συντελεστές	4
2.2	Μέθοδος Φωκά σε 2 + 1 διαστάσεις	8
3	Αποτελέσματα	10
4	Παραδοτέα	13
5	Συνεργασίες	13
6	Μελλοντικές Δράσεις	14

1 Σκοπός

Την περίοδο αυτή βελτιώθηκε και επεκτάθηκε ο μαθηματικός φορμαλισμός της μεθόδου μετασχηματισμού Φωκά για γραμμικές ΜΔΕ με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης, ώστε η παραγόμενη αναλυτική λύση να συμπεριλάβει τη γενικευμένη περίπτωση των πολλαπλών χωρίων με ακαθόριστου πλήθους περιοχών ασυνέχειας και αρχικών πηγών καθώς και με συνεχείς χρονικά εξαρτώμενες παραμέτρους, στις $1+1$ διαστάσεις. Παράλληλα, ολοκληρώθηκε από την ερευνητική ομάδα του καθ. Α. Φωκά η ανάπτυξη φορμαλισμού για την αντιμετώπιση της εξίσωσης θερμότητας στις δύο διαστάσεις (βλ. [2]) και επομένως ξεκίνησε η προσπάθεια επέκτασης της μεθόδου σε προβλήματα πολλαπλών πεδίων με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης.

1.1 Μέθοδος Φωκά για γραμμικά προβλήματα πολλαπλών πεδίων στις $1+1$ διαστάσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης και χρονικά εξαρτώμενους συντελεστές

Κύριος στόχος της παρούσας ερευνητικής δραστηριότητας αποτελεί η επέκταση του μαθηματικού φορμαλισμού που έχουμε αναπτύξει αναφορικά με τη μέθοδο μετασχηματισμού Φωκά ώστε να καταστεί δυνατή η επίλυση γενικευμένων οικογενειών προβλημάτων πολλαπλών πεδίων τα οποία χαρακτηρίζονται από συντελεστές οι οποίοι μεταβάλλονται χρονικά.

1.2 Μέθοδος Φωκά για γραμμικά προβλήματα πολλαπλών πεδίων στις $2+1$ διαστάσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης

Κύριος στόχος της παρούσας ερευνητικής δραστηριότητας αποτελεί η μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας για την ανάπτυξη της μεθόδου μετασχηματισμού Φωκά σε προβλήματα δύο χωρικών διαστάσεων ώστε να καταστεί δυνατή η ανάπτυξη κατάλληλου φορμαλισμού για την περίπτωση ενδιαφέροντος των προβλημάτων πολλαπλών πεδίων με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης. Ιδιαίτερη έμφαση φυσικά δίδεται στα πρόσφατα αποτελέσματα της συνεργαζόμενης ομάδας του Παν. Cambridge για την εξίσωση της θερμότητας στις δύο διαστάσεις.



2 Μεθοδολογία

2.1 Μέθοδος Φωκά για γραμμικά προβλήματα πολλαπλών πεδίων στις $1+1$ διαστάσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης και χρονικά εξαρτώμενους συντελεστές

Η επέκταση της μεθόδου Φωκά για την επίλυση της γενικευμένης οικογένειας προβλημάτων με χρονικά εξαρτώμενους συντελεστές βασίζεται στην χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών και αλλαγής μεταβλητών ώστε τα προβλήματα αυτά να μετασχηματιστούν σε προβλήματα για τα οποία η αναλυτική λύση τους μέσω του μετασχηματισμού Φωκά είναι εύκολα παραγόμενη από τα μέχρι τώρα αποτελέσματά μας για προβλήματα με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές.

Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε το αδιάστατο Πρόβλημα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ):

$$\begin{cases} c_t = (D(x,t)c_x)_x + \rho(t)c(x,t), & x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ c_x(a,t) = 0 \quad \text{και} \quad c_x(b,t) = 0 \\ c(x,0) = f(x) := \sum_{i=1}^M \delta(x - \xi_i), \quad \xi_i \in (a, b) \end{cases}, \quad (1)$$

όπου ο συντελεστής διάχυσης $D(x,t)$ ορίζεται ως:

$$D(x,t) = \chi(t)\gamma_j, \quad x \in R_j, \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (2)$$

με $R_j := (w_{j-1}, w_j)$ και $a \equiv w_0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n < w_{n+1} \equiv b$. Το πρόβλημα θεωρείται πολλαπλών πεδίων αφού σε κάθε περιοχή R_j η μερική διαφορική εξίσωση που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι διαφορετική, ενώ ο συντελεστής $D(x,t)$ είναι χρονικά εξαρτώμενος.

Στην κατεύθυνση μετατροπής του παραπάνω προβλήματος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές αποδεικνύουμε τα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 1. *Εαν η $c(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση (25) και η $u(x,t)$ ορίζεται ως:*

$$u(x,t) = e^{-R(t)}c(x,t) \quad \text{με} \quad R(t) = \int_0^t \rho(s)ds, \quad (3)$$

τότε η $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \nabla \cdot (D(x,t)\nabla u(x,t)). \quad (4)$$



Απόδειξη : Παρατηρώντας ότι $\dot{R}(t) = \rho(t)$ και παραγωγίζοντας την (3) ως προς t , εύκολα βλέπουμε ότι :

$$e^{-R(t)} \frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \rho(t)u(x, t) . \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (25) με $e^{-R(t)}$ καταλήγουμε στην

$$e^{-R(t)} \frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = \nabla \cdot (D(x, t)\nabla u(x, t)) + \rho(t)u(x, t) , \quad (6)$$

η οποία συνδυαζόμενη με την σχέση (5) ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Ανακαλώντας, την μορφή του $D(x, t)$ από την (2), μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

Λήμμα 2. *Εάν το $u(x, t)$ ικανοποιεί το Λήμμα 1 και*

$$\tau \equiv \tau(t) = \int_0^t \chi(s) ds , \quad (7)$$

τότε η $u(x, \tau)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) = \nabla \cdot (D(x)\nabla u(x, \tau)) . \quad (8)$$

Απόδειξη : Γράφοντας $D(x, t) = \chi(t)D(x)$ η εξίσωση (4) του Λήμματος 1 γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \chi(t)\nabla \cdot (D(x)\nabla u(x, t)) . \quad (9)$$

Το γεγονός ότι :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) = \chi(t) \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) , \quad (10)$$

ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα , το ΠΑΣΤ μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\begin{cases} u_\tau = (Du_x)_x, & x \in [a, b], \quad \tau > 0 \\ u_x(a, \tau) = 0 \quad \text{και} \quad u_x(b, \tau) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) := \sum_{i=1}^M \delta(x - \xi_i), \quad \xi_i \in (a, b) \end{cases} , \quad (11)$$

όπου η χρονική μεταβλητή τ έχει οριστεί στην (7), $\delta(x)$ δηλώνει τη συνάρτηση $\delta(x)$ του Dirac και $D \equiv D(x)$ είναι μια ασυνεχής συνάρτηση του x που ορίζεται ως:

$$D(x) = \gamma_j , \quad x \in R_j , \quad j = 1, \dots, n + 1 . \quad (12)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $u^{(j)}(x, \tau)$ η λύση του προβλήματος στο διάστημα $\overline{R_j} := [w_{j-1}, w_j]$, η λύση του (11) είναι η (βλ. Τεχνική Έκθεση 2013 και τις σχετικές δημοσιεύσεις):

$$\begin{aligned}
 u^{(j)}(x, \tau) &= \frac{c_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j kx - k^2 \tau} \widehat{f}^{(j)}(c_j k) dk \\
 &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k(x-w_{j-1}) - k^2 \tau} \left[\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2) \right] dk \\
 &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k(x-w_j) - k^2 \tau} \left[\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2) \right] dk.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

όπου $\widehat{f}^{(j)}(x)$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων $f^{(j)}(x)$

$$\widehat{f}^{(j)}(k) = \int_{w_{j-1}}^{w_j} e^{-ikx} f^{(j)}(x) dx,
 \tag{14}$$

c_j είναι συνάρτηση του γ_j

$$c_j = \gamma_j^{-\frac{1}{2}}$$

και οι ποσότητες

- $\widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n+1$
- $\widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n+1$
- $\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2)$ για κάθε $j = 2, 3, \dots, n+1$
- $\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

δίδονται από την λύση του συστήματος

$$G\tilde{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{f}},
 \tag{15}$$

με

$$G = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_3^{(1)} & A_4^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_5^{(1)} & A_7^{(1)} & A_8^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & A_3^{(2)} & A_4^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_5^{(2)} & A_6^{(2)} & A_7^{(2)} & A_8^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & A_3^{(n)} & A_4^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_5^{(n)} & A_6^{(n)} & A_7^{(n)} & A_8^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} & A_3^{(n+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_5^{(n+1)} & A_6^{(n+1)} & A_7^{(n+1)} \end{bmatrix},$$

i	$A_i^{(j)}$				
1	$ic_j\gamma_j k e^{-ic_jkw_{j-1}}$	$, \tilde{\mathbf{u}} =$	$\begin{bmatrix} \tilde{u}^{(1)}(w_0, k^2) \\ \tilde{u}^{(1)}(w_1, k^2) \\ \tilde{u}_x^{(1)}(w_1, k^2) \\ \vdots \\ \tilde{u}^{(n)}(w_n, k^2) \\ \tilde{u}_x^{(n)}(w_n, k^2) \\ \tilde{u}^{(n+1)}(w_{n+1}, k^2) \end{bmatrix}$	$\text{και } \hat{\mathbf{f}} =$	
2	$\gamma_{j-1} e^{-ic_jkw_{j-1}}$				$\hat{f}^{(1)}(c_1k)$
3	$-ic_j\gamma_j k e^{-ic_jkw_j}$				$\hat{f}^{(1)}(-c_1k)$
4	$-\gamma_j e^{-ic_jkw_j}$				$\hat{f}^{(2)}(c_2k)$
5	$-ic_j\gamma_j k e^{ic_jkw_{j-1}}$				$\hat{f}^{(2)}(-c_2k)$
6	$\gamma_{j-1} e^{ic_jkw_{j-1}}$				\vdots
7	$ic_j\gamma_j k e^{ic_jkw_j}$				$\hat{f}^{(n)}(c_nk)$
8	$-\gamma_j e^{ic_jkw_j}$				$\hat{f}^{(n)}(-c_nk)$
			$\hat{f}^{(n+1)}(c_{n+1}k)$	$\hat{f}^{(n+1)}(-c_{n+1}k)$	

Επομένως, δεδομένου ότι η συνάρτηση (7) $\tau(t)$ είναι αμφιμονοσήμαντη, η λύση

του αρχικού προβλήματος (1) δίνεται από την:

$$\begin{aligned}
 c^{(j)}(x, t) &= \frac{c_j}{2\pi} e^{-R(\tau^{-1}(t))} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k x - k^2 \tau^{-1}(t)} \widehat{f}^{(j)}(c_j k) dk \\
 &- \frac{1}{2\pi c_j} e^{-R(\tau^{-1}(t))} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k(x-w_{j-1}) - k^2 \tau^{-1}(t)} \left[\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2) \right] dk \\
 &- \frac{1}{2\pi c_j} e^{-R(\tau^{-1}(t))} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k(x-w_j) - k^2 \tau^{-1}(t)} \left[\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2) \right] dk.
 \end{aligned}$$

(16)

2.2 Μέθοδος Φωκά σε 2 + 1 διατάσεις

Το πρόβλημα που μελέτησε η συνεργαζόμενη ομάδα του Παν. Cambridge (Φωκάς/Μαντζαβίνος) αναφέρεται στην εξίσωση της θερμότητας στις δύο διαστάσεις με πλάγιες Neumann συνοριακές συνθήκες, και πιο συγκεκριμένα (βλ. [2]):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad x, y \in (0, \infty), \quad t > 0 \\
 u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad x, y \in (0, \infty) \\
 \cos \beta_1 u_x(x, 0, t) - \sin \beta_1 u_y(x, 0, t) = F_1(x, t), \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0 \\
 \cos \beta_2 u_x(0, y, t) - \sin \beta_2 u_y(0, y, t) = F_2(y, t), \quad y \in (0, \infty), \quad t > 0
 \end{array} \right. \quad (17)$$

Η αναλυτική λύση του παραπάνω προβλήματος επετεύχθη μέσω της παρακάτω γενικής διαδικασίας (βλ. [2]):

1. Μετατροπή της εξίσωσης

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

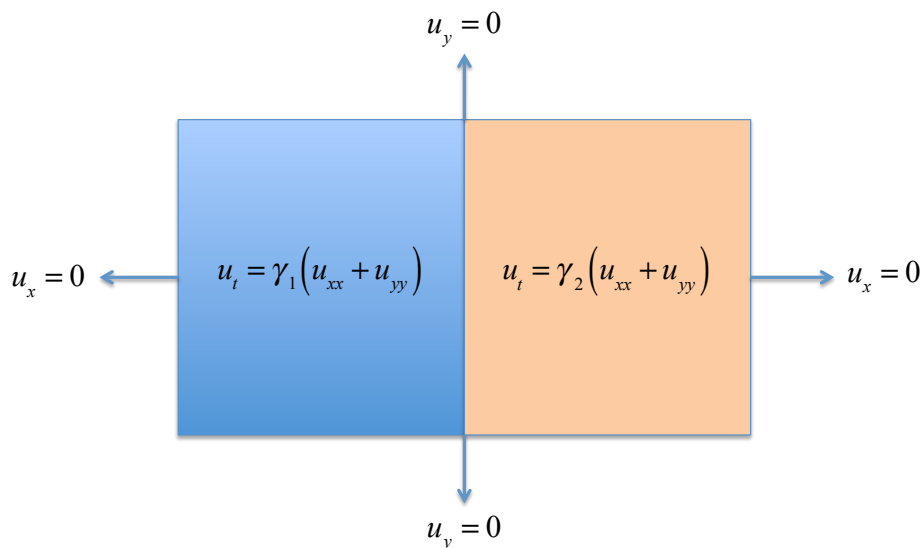


στην αποκλίνουσα μορφή:

$$\left(e^{-ik_1x - ik_2y + (k_1^2 + k_2^2)t} u \right)_t = \left[e^{-ik_1x - ik_2y + (k_1^2 + k_2^2)t} (u_x + ik_1u) \right]_x + \left[e^{-ik_1x - ik_2y + (k_1^2 + k_2^2)t} (u_y + ik_2u) \right]_y$$

2. Χρήση του θεωρήματος Gauss για την παραγωγή της ολικής συνθήκης (global relation).
3. Επίλυση της ολικής συνθήκης ως προς τον μετασχηματισμό Fourier της λύσης $u(x, y, t)$.
4. Χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier και καθορισμό της λύσης $u(x, y, t)$.

Η ερευνητική ομάδα του Πολυτεχνείου Κρήτης σε συνεργασία με ερευνητική ομάδα του Παν. Cambridge, μελετά την δυνατότητα επέκτασης της ανωτέρω γενικής μεθόδου σε ένα πρόβλημα δυο ορθογώνιων χωρικών πεδίων, με Neumann συνοριακές συνθήκες και κατάλληλες συνθήκες συνέχειας στην διεπαφή, όπως απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Το πρόβλημα αυτό βρίσκεται σε εξέλιξη.

3 Αποτελέσματα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε μια εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε σε προβλήματα ιατρικής. Η μαθηματική εξίσωση του μοντέλου διάχυσης καρκινικών όγκων στον εγκέφαλο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \nabla \cdot (\bar{D} \nabla \bar{c}) + \bar{\rho} \bar{c}, \quad (18)$$

όπου $\bar{c}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$ είναι ο αριθμός των κυττάρων στη θέση \bar{x} την χρονική στιγμή \bar{t} , το $\bar{\rho}$ παριστάνει το ποσοστό της ανάπτυξης των κυττάρων συμπεριλαμβανομένου και του πολλαπλασιασμού τους και του θανάτου τους (0.012 1/day , cf. [1]), και $\bar{D}(\bar{\mathbf{x}})$ είναι η σταθερά διάχυσης των κυττάρων στον ιστό του εγκεφάλου που δίνεται από την σχέση

$$\bar{D} = \bar{D}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \bar{D}_g & , \quad \bar{\mathbf{x}} \text{ ανήκει στην φαιά ουσία } (\bar{x} \in \bar{\Omega}_w) \\ \bar{D}_w & , \quad \bar{\mathbf{x}} \text{ ανήκει στην λευκή ουσία } (\bar{x} \in \bar{\Omega}_g) \end{cases}, \quad (19)$$

με D_g και D_w να είναι βαθμωτές ποσότητες με $D_w > D_g$. Το μοντέλο ολοκληρώνεται με zero flux συνοριακές συνθήκες που υποδηλώνουν τη μη επέκταση των καρκινικών κυττάρων εκτός της περιοχής του εγκεφάλου, και αρχική συνθήκη $\bar{c}(\bar{\mathbf{x}}, 0) = \bar{f}(\bar{\mathbf{x}})$, όπου $\bar{f}(\bar{x})$ δείχνει την αρχική χωρική κατανομή των κακοηθών κυττάρων.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί μέρος μια γενικότερης κατηγορίας προβλημάτων στα οποία οι παράμετροι διάχυσης και ανάδρασης εξαρτώνται και από τον χρόνο.

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{\chi}(\bar{t}) \bar{D}(\bar{x}) \quad \text{και} \quad \bar{\rho} \equiv \bar{\rho}(\bar{t}), \quad (20)$$

όπου $\bar{\chi}(\bar{t}) \neq 0$ και $\bar{\rho}(\bar{t}) \neq 0$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς \bar{t} . Χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες μεταβλητές (βλ. επίσης [5], [4])

$$t = \bar{\rho}_0 \bar{t}, \quad x = \sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\chi}_0 \bar{D}_w}} \bar{x}, \quad \chi(t) = \frac{\bar{\chi}(\bar{\rho}_0 \bar{t})}{\bar{\chi}_0}, \quad \gamma = \frac{\bar{D}_g}{\bar{D}_w}, \quad (21)$$

όπου

$$D \equiv D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_w \\ \gamma, & x \in \Omega_g \end{cases}, \quad D(x, t) = \chi(t) D(x), \quad (22)$$

$$\rho \equiv \rho(t) = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \bar{\rho}(\bar{\rho}_0 \bar{t}), \quad f(x) = \bar{f} \left(\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\chi}_0 \bar{D}_w}} x \right), \quad (23)$$



και

$$c(x, t) = \frac{\bar{\chi}_0 \bar{D}_w}{\bar{\rho}_0 N_0} \bar{c} \left(\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\chi}_0 \bar{D}_w}} \bar{x}, \bar{\rho}_0 \bar{t} \right), \quad (24)$$

με $N_0 = \int \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x}$ να δηλώνει την αρχικό πλήθος κακοηθών κυττάρων για $\bar{t}_0 = 0$, $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\bar{t}_0)$ και $\bar{\chi}_0 = \bar{\chi}(\bar{t}_0)$, καταλήγουμε στην αδιάστατη μορφή της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = \nabla \cdot (D(x, t) \nabla c(x, t)) + \rho(t) c(x, t). \quad (25)$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$c(x, t) = e^{R(t)} u(x, t) \quad \text{όπου} \quad R(t) = \int_0^t \rho(s) ds$$

καθώς και την μεταβλητή

$$\tau \equiv \tau(t) = \int_0^t \chi(s) ds$$

καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή του μοντέλου:

$$\begin{cases} u_t = (Du_x)_x, & x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ u_x(a, t) = 0 \quad \text{and} \quad u_x(b, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) := \sum_{i=1}^M \delta(x - \xi_i), \quad \xi_i \in (a, b) \end{cases}, \quad (26)$$

όπου $\delta(x)$ δηλώνει την Dirac delta συνάρτηση.

Λαμβάνοντας υπόψιν την ετερογένεια του εγκεφαλικού ιστού (λευκή - φαιά ουσία), θεωρούμε ότι το διάστημα $[a, b]$ είναι χωρισμένο σε $n + 1$ περιοχές $R_j := (w_{j-1}, w_j)$, με $a \equiv w_0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n < w_{n+1} \equiv b$, και εάν, για κάποιο j , η R_j είναι η λευκή περιοχή, τότε η R_{j-1} και R_{j+1} θα είναι η φαιά περιοχή. Συνεπώς η αδιάστατη μορφή του συντελεστή διάχυσης $D(x)$ γίνεται:

$$D(x) = \gamma_j, \quad x \in R_j, \quad j = 1, \dots, n + 1 \quad (27)$$

με

$$\gamma_j := \begin{cases} D_g/D_w, & \text{όταν η } R_j \text{ είναι η φαιά ουσία} \\ 1, & \text{when } R_j \text{ είναι λευκή ουσία} \end{cases}. \quad (28)$$

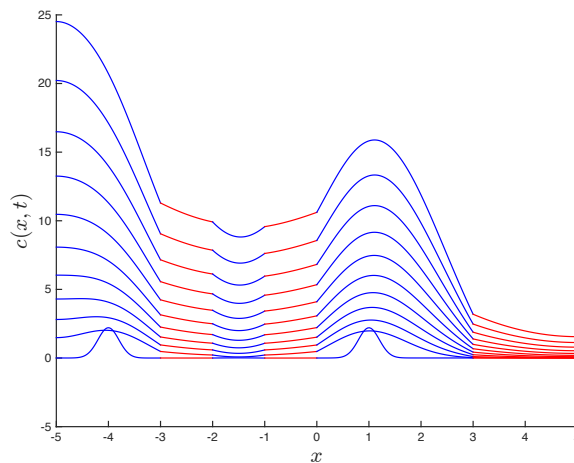
Στο μοντέλο 26 θεωρούμε $[a, b] = [-5, 5]$ και εσωτερικά σημεία

$$[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [-3, -2, -1, 0, 3].$$

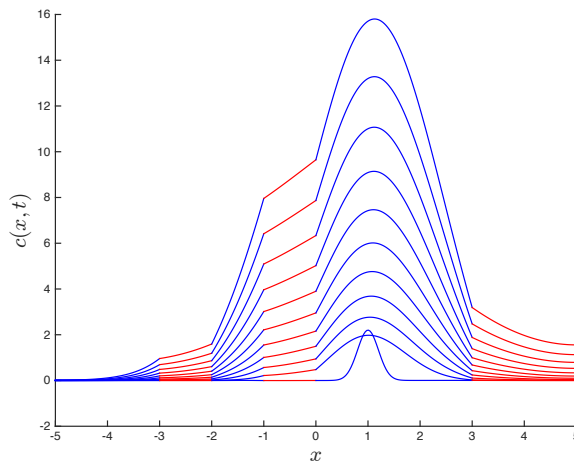


Επίσης $\chi(t) = 0.2t$, $\gamma_j = \gamma = D_g/D_w = 0.2$ για κάθε $j = 1, 3, 5$ και $\rho = 1$.

Στο σχήμα 1, παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας των κυττάρων $c(x, t)$ για την περίπτωση δυο αρχικών πηγών κεντραρισμένων στα $\xi_1 = -4$ και $\xi_2 = 1$, για διάφορα χρονικά βήματα $t = t_m$ ($m = 0, 1, \dots$). Δηλαδή κάθε καμπύλη στο σχήμα αναπαριστά την πυκνότητα των κυττάρων σε μια δεδομένη χρονική στιγμή $c(x, t_m)$. Εντελώς ανάλογα στο σχήμα 2 παρουσιάζεται η περίπτωση μιας πηγής κυττάρων κεντραρισμένη στο $\xi_1 = 1$.



Σχήμα 1: Χρονική εξέλιξη του πυκνότητας του όγκου $c(x, t)$ για δυο πηγές.



Σχήμα 2: Χρονική εξέλιξη του πυκνότητας του όγκου $c(x, t)$ για μια πηγή.

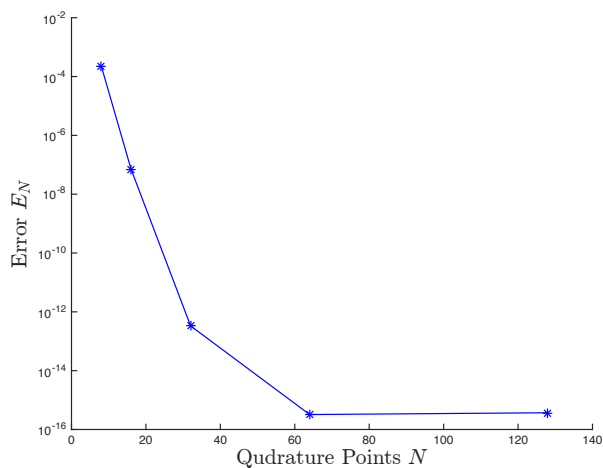
Παρατηρείστε ότι και στις δυο περιπτώσεις η λύση είναι συνεχής και ομαλή σε

όλο το διάστημα εκτός από τα σημεία διεπαφής όπως αναμένονταν.

Το σχετικό σφάλμα δίνεται από τον τύπο

$$E_N := \frac{\|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_\infty}{\|u_{N_{i+1}}\|_\infty},$$

όπου N δηλώνει το πλήθος των σημείων ολοκλήρωσης και u_N είναι η αντίστοιχη αριθμητική λύση. Από το σχήμα 3 παρατηρούμε την ταχεία πτώση του σφάλματος E_N .



Σχήμα 3: Το σχετικό σφάλμα E_N

4 Παραδοτέα

- Παρουσιάσεις σε διεθνή συνέδρια ως εξής:
 - Α. Σηφαλάκης, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ε. Παπαδοπούλου, Ι. Σαριδάκης, "Fokas transform method for classes of advection-diffusion IBVPs", NUMAN 2014, CMA 2014
- Η παρούσα τεχνική έκθεση.

5 Συνεργασίες

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε από την ερευνητική ομάδα του Πολυτεχνείου Κρήτης (ΚΕΟ 1) αποτελούμενη από τους καθ. Ι. Σαριδάκη, καθ. Ε.



Παπαδοπούλου, Δρ. Σηφαλάκη Αναστάση, Δρ. Μ. Παπαδομανωλάκη σε συνεργασία με τον καθηγητή Α. Φωκά και τον Δ. Μαντζαβίνο του Παν. Cambridge.

6 Μελλοντικές Δράσεις

- Εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα εξέλιξης καρκινικών όγκων τα οποία συμπεριλαμβάνουν και πρωτόκολλα ραδιοθεραπείας και χημειοθεραπείας που επιβάλλουν και χρονικές ασυνέχειες.
- Εξέλιξη του φορμαλισμού στις 2+1 διαστάσεις.

Αναφορές

- [1] Cook J, Woodward DE, Tracqui P και Murray JD (1995) *Resection of gliomas and life expectancy*, J Neurooncol., 24, 131.
- [2] D. Mantzavinos and A.S. Fokas, *The unified method for the heat equation: II. Non-separable boundary conditions in two dimensions*, European Journal of Applied Mathematics, (submitted)
- [3] Kalimeris K. και Fokas AS *The Heat Equation in the Interior of an Equilateral Triangle*, Studies in Applied Mathematics, 124, 283-305 2010.
- [4] Swanson KR, Alvord EC Jr και Murray JD *A quantitative model for differential motility of gliomas in grey and white matter*, Cell Proliferation, 33, 317-329, 2000.
- [5] K. R. Swanson, *Mathematical modeling of the growth and control of tumors*, PHD Thesis, University of Washington, 1999.

