

Ετήσια Τεχνική Έκθεση

Έτος 2013



ΘΑΛΗΣ – Πολυτεχνείο Κρήτης

Πλατφόρμα προηγμένων μαθηματικών μεθόδων και λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών πεδίων (multi physics, multidomain) σε σύγχρονες υπολογιστικές αρχιτεκτονικές: Εφαρμογή σε προβλήματα Περιβαλλοντικής Μηχανικής και Ιατρικής (MATENVMED- MIS 379416)

Δράση 2.4

Μέθοδοι Μετασχηματισμού Φωκά



Περιεχόμενα

1	Σκοπός	3
2	Μεθοδολογία	3
2.1	Πρόβλημα N Πολλαπλών-Πεδίων σε $1 + 1$ Διαστάσεις	3
2.2	Ολική Συνθήκη	4
2.3	Ολοκληρωτική Αναπαράσταση της Λύσης	7
3	Αποτελέσματα	11
4	Παραδοτέα	12
5	Συνεργασίες	13
6	Μελλοντικές Δράσεις	13

1 Σκοπός

Την περίοδο αυτή βελτιώθηκε και επεκτάθηκε ο μαθηματικός φορμαλισμός της μεθόδου μετασχηματισμού Φωκά για γραμμικές ΜΔΕ με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης, ώστε η παραγόμενη αναλυτική λύση να συμπεριλάβει τη γενικευμένη περίπτωση των πολλαπλών χωρίων με ακαθόριστου πλήθους περιοχών ασυνέχειας και αρχικών πηγών.

2 Μεθοδολογία

2.1 Πρόβλημα N Πολλαπλών-Πεδίων σε $1 + 1$ Διαστάσεις

Θεωρούμε αδιάστατο Πρόβλημα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ) :

$$\begin{cases} c_t = (Dc_x)_x + c, & x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ c_x(a, t) = 0 \quad \text{και} \quad c_x(b, t) = 0 \\ c(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

το οποίο μέσω του κλασικού εκθετικού μετασχηματισμού

$$c(x, t) = e^t u(x, t) \quad (2)$$

γράφεται ισοδύναμα και ως

$$\begin{cases} u_t = (Du_x)_x, & x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ u_x(a, t) = 0 \quad \text{και} \quad u_x(b, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) := \sum_{i=1}^M \delta(x - \xi_i), \quad \xi_i \in (a, b) \end{cases}, \quad (3)$$

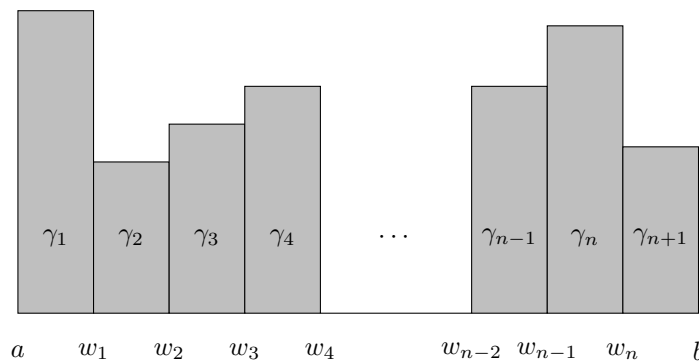
όπου $\delta(x)$ δηλώνει την Dirac delta συνάρτηση.

Θεωρώντας ότι το διάστημα $[a, b]$ είναι χωρισμένο σε $n + 1$ περιοχές $R_j := (w_{j-1}, w_j)$, με $a \equiv w_0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n < w_{n+1} \equiv b$, ο συντελεστής διάχυσης $D = D(x)$, ο οποίος είναι ασυνεχής και χαρακτηρίζει τον multi domain χαρακτήρα του προβλήματος, ορίζεται ως (βλ. σχήμα 1):

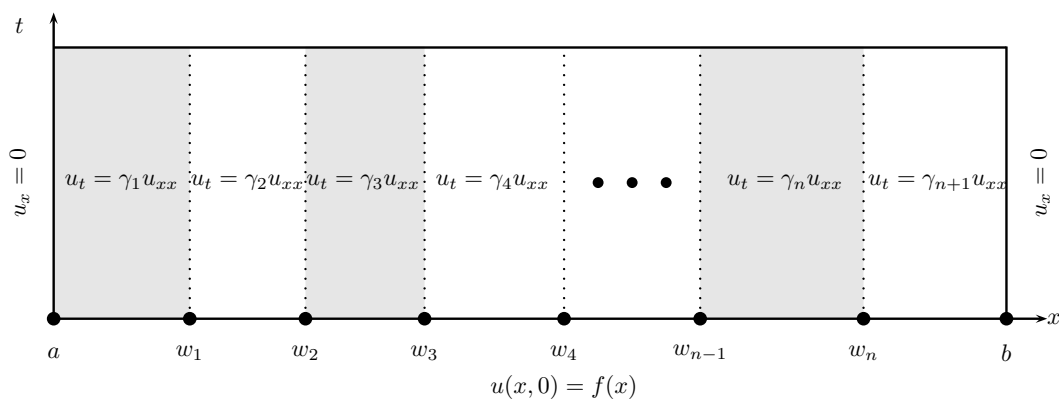
$$D(x) = \gamma_j, \quad x \in R_j, \quad j = 1, \dots, n + 1 \quad (4)$$

Στο σχήμα 2 αναπαρίσταται γραφικά το πρόβλημα, το οποίο και θεωρείται πολλαπλών πεδίων αφού σε κάθε περιοχή η μερική διαφορική εξίσωση που καλούμαστε να επιλύσουμε είναι διαφορετική.





Σχήμα 1: Ο ασυνεχής συντελεστής διάχυσης σε $n + 1$ περιοχές.



Σχήμα 2: Το πρόβλημα αρχικών τιμών σε $n + 1$ περιοχές.

2.2 Ολική Συνθήκη

Η παραβολική φύση του προβλήματος συνεπάγεται τη συνέχεια των u και Du_x σε κάθε σημείο διεπαφής w_j . Δηλαδή

$$u(w_j, t) := \lim_{x \rightarrow w_j^+} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow w_j^-} u(x, t), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$Du_x(w_j, t) := \lim_{x \rightarrow w_j^+} D(x)u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow w_j^-} D(x)u_x(x, t), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Έστω $u^{(j)}(x, t)$ η λύση του προβλήματος στο διάστημα $\overline{R_j} := [w_{j-1}, w_j]$.

$$u^{(j)}(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & x \in R_j \\ \lim_{x \rightarrow w_{j-1}^+} u(x, t), & x = w_{j-1} \\ \lim_{x \rightarrow w_j^-} u(x, t), & x = w_j \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n + 1, \quad (7)$$

και επομένως

$$u_x^{(j)}(w_{j-1}, t) := \lim_{x \rightarrow w_{j-1}^+} u_x(x, t) \quad \text{και} \quad u_x^{(j)}(w_j, t) := \lim_{x \rightarrow w_j^-} u_x(x, t). \quad (8)$$

Τότε θα ισχύει

$$u_t^{(j)} = (\gamma_j u_x^{(j)})_x = \gamma_j u_{xx}^{(j)}, \quad (9)$$

και χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς (5)-(6), έχουμε επίσης ότι:

$$u^{(j)}(w_j, t) = u^{(j+1)}(w_j, t) \quad \text{και} \quad \gamma_j u_x^{(j)}(w_j, t) = \gamma_{j+1} u_x^{(j+1)}(w_j, t). \quad (10)$$

Στην περιοχή $\overline{R_j}$ παρατηρούμε ότι η $u^{(j)}(x, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση :

$$u_t^{(j)} = (\gamma_j u_x^{(j)})_x = \gamma_j u_{xx}^{(j)} \quad (11)$$

και η formal adjoint $\tilde{u}_t^{(j)}$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$-\tilde{u}_t^{(j)} = \gamma_j \tilde{u}_{xx}^{(j)}. \quad (12)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (9) και (12) με \tilde{u} και u , αντίστοιχα, και αφαιρώντας τις εξισώσεις που παράγονται καταλήγουμε στην :

$$(u^{(j)} \tilde{u}^{(j)})_t - (\gamma_j u_x^{(j)} \tilde{u}^{(j)} - \gamma_j u^{(j)} \tilde{u}_x^{(j)})_x = 0. \quad (13)$$

Δεδομένου ότι μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων της (12) δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{u}^{(j)}(x, t, k) = e^{-ikx + \gamma_j k^2 t}, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

η εξίσωση (13) γίνεται:

$$(e^{-ikx + \gamma_j k^2 t} u)_t - (e^{-ikx + \gamma_j k^2 t} \gamma_j (u_x + iku))_x, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

η οποία είναι η divergence form της εξίσωσης (9). Ολοκληρώνοντας στην περιοχή $A_j := \{(x, t) : x \in \overline{R_j}, 0 \leq t \leq T\}$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του

Green καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} & \int_{w_{j-1}}^{w_j} e^{-ikx} f^{(j)}(x) dx - \int_{w_{j-1}}^{w_j} e^{-ikx + \gamma_j k^2 T} u^{(j)}(x, T) dx \\ & - \int_0^T e^{-ikw_{j-1} + \gamma_j k^2 t} \gamma_j (u_x^{(j)}(w_{j-1}, t) + ik u^{(j)}(w_{j-1}, t)) dt \\ & + \int_0^T e^{-ikw_j + \gamma_j k^2 t} \gamma_j (u_x^{(j)}(w_j, t) + ik u^{(j)}(w_j, t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Αν η $f^{(j)}(x)$ είναι η αρχική συνθήκη στην $\overline{R_j}$,

$$f^{(j)}(x) = f|_{\overline{R_j}}(x)$$

$\widehat{f}^{(j)}(x)$ και $\widehat{q}^{(j)}(k, t)$ είναι η μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων $f^{(j)}(x)$ και $u^{(j)}(x, t)$, αντίστοιχα

$$\widehat{f}^{(j)}(k) = \int_{w_{j-1}}^{w_j} e^{-ikx} f^{(j)}(x) dx \quad (17)$$

$$\widehat{u}^{(j)}(k, t) = \int_{w_{j-1}}^{w_j} e^{-ikx} u^{(j)}(x, t) dx, \quad (18)$$

και $\widetilde{u}^{(j)}$ και $\widetilde{u}_x^{(j)}$ δίνονται από τις σχέσεις :

$$\widetilde{u}^{(j)}(x, \gamma_j k^2) := \int_0^T e^{\gamma_j k^2 t} u^{(j)}(x, t) dt \quad (19)$$

$$\widetilde{u}_x^{(j)}(x, \gamma_j k^2) := \int_0^T e^{\gamma_j k^2 t} u_x^{(j)}(x, t) dt. \quad (20)$$

τότε η εξίσωση (16) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} e^{\gamma_j k^2 T} \widehat{u}^{(j)}(k, T) &= \widehat{f}^{(j)}(k) - \gamma_j e^{-ikr_{j-1}} (\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, \gamma_j k^2) + ik \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, \gamma_j k^2)) \\ &+ \gamma_j e^{-ikr_j} (\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, \gamma_j k^2) + ik \widetilde{u}^{(j)}(w_j, \gamma_j k^2)), \end{aligned} \quad (21)$$

για όλα τα $k \in \mathbb{C}$. Η (21) ισχύει για όλα τα $t \in [0, T]$. Αντικαθιστώντας το T με t έχουμε :

$$e^{\gamma_j k^2 t} \widehat{u}^{(j)}(k, t) = \widehat{f}^{(j)}(k) - \gamma_j e^{-ikw_{j-1}} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, \gamma_j k^2) + ik \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, \gamma_j k^2)] \\ + \gamma_j e^{-ikw_j} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, \gamma_j k^2) + ik \widetilde{u}^{(j)}(w_j, \gamma_j k^2)], \quad (22)$$

για όλα τα $k \in \mathbb{C}$. Η τελευταία εξίσωση καλείται "Ολική Συνθήκη".

2.3 Ολοκληρωτική Αναπαράσταση της Λύσης

Θέτοντας $\lambda_j^2 = \gamma_j k^2$ και $c_j = \gamma_j^{-\frac{1}{2}}$ αν στην εξίσωση (22) και στη συνέχεια μετονομάζοντας το λ το k η σχέση γίνεται:

$$e^{k^2 t} \widehat{u}^{(j)}(c_j k, t) = \widehat{f}^{(j)}(c_j k) - \gamma_j e^{-ic_j k w_{j-1}} (\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)) \\ + \gamma_j e^{-ic_j k w_j} (\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)), \quad (23)$$

για όλα τα $k \in \mathbb{C}$. Αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Fourier $\widehat{u}^{(j)}(c_j k, t)$ στην εξίσωση (23) έχουμε:

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{c_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k x - k^2 t} \widehat{f}^{(j)}(c_j k) dk \\ - \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k (x - w_{j-1}) - k^2 t} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)] dk \\ - \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k (x - w_j) - k^2 t} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)] dk. \quad (24)$$

Στην παραπάνω έκφραση για την λύση $u^{(j)}(x, t)$ εμφανίζονται οι άγνωστες ποσότητες :

- $\widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n + 1$



- $\tilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n + 1$
- $\tilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2)$ για κάθε $j = 2, 3, \dots, n + 1$
- $\tilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.

Για τον καθορισμό τους, χρησιμοποιούμε κατ' αρχήν την απεικόνιση $k \rightarrow -k$ και γράφουμε την εξίσωση (22) ως :

$$e^{k^2 t} \hat{u}^{(j)}(-c_j k, t) = \hat{f}^{(j)}(-c_j k) - \gamma_j e^{ic_j k w_{j-1}} (\tilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) - ic_j k \tilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + \gamma_j e^{ic_j k w_j} (\tilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) - ic_j k \tilde{u}^{(j)}(w_j, k^2), \quad (25)$$

για όλα τα $k \in \mathbb{C}$.

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τόσο τους περιορισμούς (10) όσο και τις συνοριακές συνθήκες, οι ολικές συνθήκες (23) (25) γίνονται :

- για $j = 1$:

$$ic_1 \gamma_1 k e^{-ic_1 k r_0} \tilde{u}^{(1)}(w_0, k^2) - ic_1 \gamma_1 k e^{-ic_1 k w_1} \tilde{u}^{(1)}(w_1, k^2) + \gamma_1 e^{-ic_1 k w_1} \tilde{u}_x^{(1)}(w_1, k^2) = \hat{f}(c_1 k) \quad (26)$$

$$-ic_1 \gamma_1 k e^{ic_1 k w_0} \tilde{u}^{(1)}(w_0, k^2) + ic_1 \gamma_1 k e^{ic_1 k w_1} \tilde{u}^{(1)}(w_1, k^2) - \gamma_1 e^{-ic_1 k w_1} \tilde{u}_x^{(1)}(w_1, k^2) = \hat{f}(-c_1 k), \quad (27)$$

- για $j = 2, 3, \dots, n$:

$$ic_j \gamma_j k e^{-ic_j k w_{j-1}} \tilde{u}^{(j-1)}(w_{j-1}, k^2) + \gamma_{l(j-1)} e^{-ic_j k w_{j-1}} \tilde{u}_x^{(j-1)}(w_{j-1}, k^2) - ic_j \gamma_j k e^{-ic_j k w_j} \tilde{u}^{(j)}(w_j, k^2) - \gamma_j e^{-ic_j k r_j} \tilde{u}_x^{(j)}(r_j, k^2) = \hat{f}(c_j k) \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 & -ic_j \gamma_j k e^{ic_j k w_{j-1}} \tilde{u}^{(j-1)}(w_{j-1}, k^2) + \gamma_{j-1} e^{ic_j k w_{j-1}} \tilde{u}_x^{(j-1)}(w_{j-1}, k^2) \\
 & + ic_j \gamma_j k e^{ic_j k w_j} \tilde{u}^{(j)}(w_j, k^2) - \gamma_j e^{-ic_j k w_j} \tilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) = \hat{f}(-c_j k),
 \end{aligned} \tag{29}$$

• για $j = n + 1$:

$$\begin{aligned}
 & ic_{(n+1)} \gamma_{n+1} k e^{-ic_{n+1} k r_n} \tilde{u}^{(n)}(w_n, k^2) + \gamma_n e^{-ic_{n+1} k w_n} \tilde{u}_x^{(n)}(w_n, k^2) \\
 & - ic_{n+1} \gamma_{n+1} k e^{-ic_{n+1} k w_{n+1}} \tilde{u}^{(n+1)}(w_{n+1}, k^2) = \hat{f}(c_{n+1} k)
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 & -ic_{n+1} \gamma_{n+1} k e^{ic_{n+1} k r_n} \tilde{u}^{(n)}(w_n, k^2) + \gamma_n e^{ic_{n+1} k r_n} \tilde{u}_x^{(n)}(w_n, k^2) \\
 & + ic_{n+1} \gamma_{n+1} k e^{ic_{n+1} k w_{n+1}} \tilde{u}^{(n+1)}(w_{n+1}, k^2) = \hat{f}(-c_{n+1} k).
 \end{aligned} \tag{31}$$

Τέλος, συνδυασμός των παραπάνω εξισώσεων μας οδηγούν στο $2(n + 1) \times 2(n + 1)$ γραμμικό σύστημα

$$G \tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \tag{32}$$

με

$$G = \begin{bmatrix}
 A_1^{(1)} & A_3^{(1)} & A_4^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_5^{(1)} & A_7^{(1)} & A_8^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & A_3^{(2)} & A_4^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_5^{(2)} & A_6^{(2)} & A_7^{(2)} & A_8^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & A_3^{(n)} & A_4^{(n)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_5^{(n)} & A_6^{(n)} & A_7^{(n)} & A_8^{(n)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} & A_3^{(n+1)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_5^{(n+1)} & A_6^{(n+1)} & A_7^{(n+1)}
 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}^{(1)}(w_0, k^2) \\ \tilde{u}^{(1)}(w_1, k^2) \\ \tilde{u}_x^{(1)}(w_1, k^2) \\ \vdots \\ \tilde{u}^{(n)}(w_n, k^2) \\ \tilde{u}_x^{(n)}(w_n, k^2) \\ \tilde{u}^{(n+1)}(w_{n+1}, k^2) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}^{(1)}(c_1 k) \\ \hat{f}^{(1)}(-c_1 k) \\ \hat{f}^{(2)}(c_2 k) \\ \hat{f}^{(2)}(-c_2 k) \\ \vdots \\ \hat{f}^{(n)}(c_n k) \\ \hat{f}^{(n)}(-c_n k) \\ \hat{f}^{(n+1)}(c_{n+1} k) \\ \hat{f}^{(n+1)}(-c_{n+1} k) \end{bmatrix} .$$

και τις τιμές των $A_i^{(j)}$ να δίνονται από

i	$A_i^{(j)}$
1	$ic_j \gamma_j k e^{-ic_j k w_{j-1}}$
2	$\gamma_{j-1} e^{-ic_j k w_{j-1}}$
3	$-ic_j \gamma_j k e^{-ic_j k w_j}$
4	$-\gamma_j e^{-ic_j k w_j}$
5	$-ic_j \gamma_j k e^{ic_j k w_{j-1}}$
6	$\gamma_{j-1} e^{ic_j k w_{j-1}}$
7	$ic_j \gamma_j k e^{ic_j k w_j}$
8	$-\gamma_j e^{ic_j k w_j}$

η λύση του οποίου προσδιορίζει τις άγνωστες ποσότητες $\tilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2)$ και $\tilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)$, και συνεπώς και όλες τις λύσεις $u^{(j)}(x, t)$, $j = 1, \dots, n$ που περιγράφονται σε κλειστή μορφή από τη σχέση (24).

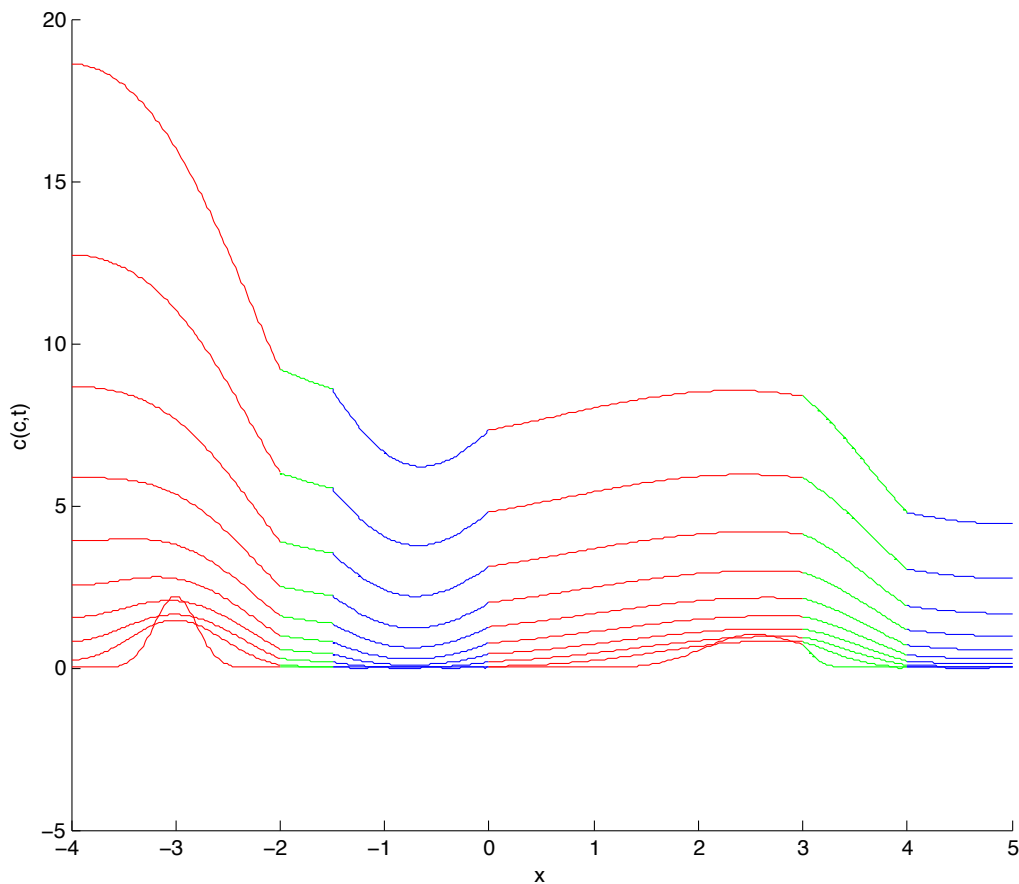
Για την αριθμητική αποτίμηση της σχέσης (24) χρησιμοποιήσαμε αποτελεσματικά τις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης σε υπερβολικές καμπύλες (contours) που περιγράφουμε στην αντίστοιχη Τεχνική Έκθεση 2012, και συνεπώς τα παραλείπουμε.

3 Αποτελέσματα

Αποτελέσματα σχετικά με την συμπεριφορά της μεθόδου σε μοντέλα εξέλιξης καρκινικών όγκων εγκεφάλου έχουν συμπεριληφθεί στην Τεχνική Έκθεση Δράσης 4.2 έτους 2013. Εδώ παραθέτουμε, για λόγους πληρότητας, ένα παράδειγμα, για να επιδείξουμε την συμπεριφορά κυρίως της μεθόδου.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε για τα αριθμητικά μας αποτελέσματα (ακολουθώντας το [4]) περιλαμβάνουν το διάστημα $[a, b] = [-4, 5]$, τα σημεία διεπαφής $[w_1, w_2, w_3, w_4, w_5] = [-2, -1.5, 0, 3, 4]$ των πολλαπλών περιοχών, τον συντελεστή διάχυσης $\gamma_j = D_g/D_w = 0.2$ για όλα τα $j = 1, 3, \dots, n + 1$ και δύο πηγές καρκινικών κυττάρων με κέντρα στα σημεία $\xi_1 = -3$ και $\xi_2 = 2.5$.

Στο γράφημα 3 παρουσιάζεται η διάχυση του καρκινικού όγκου σε διάφορα χρονικά βήματα. Παρατηρείστε ότι η λύση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα εκτός των σημείων διεπαφής όπου είναι μόνο συνεχής.

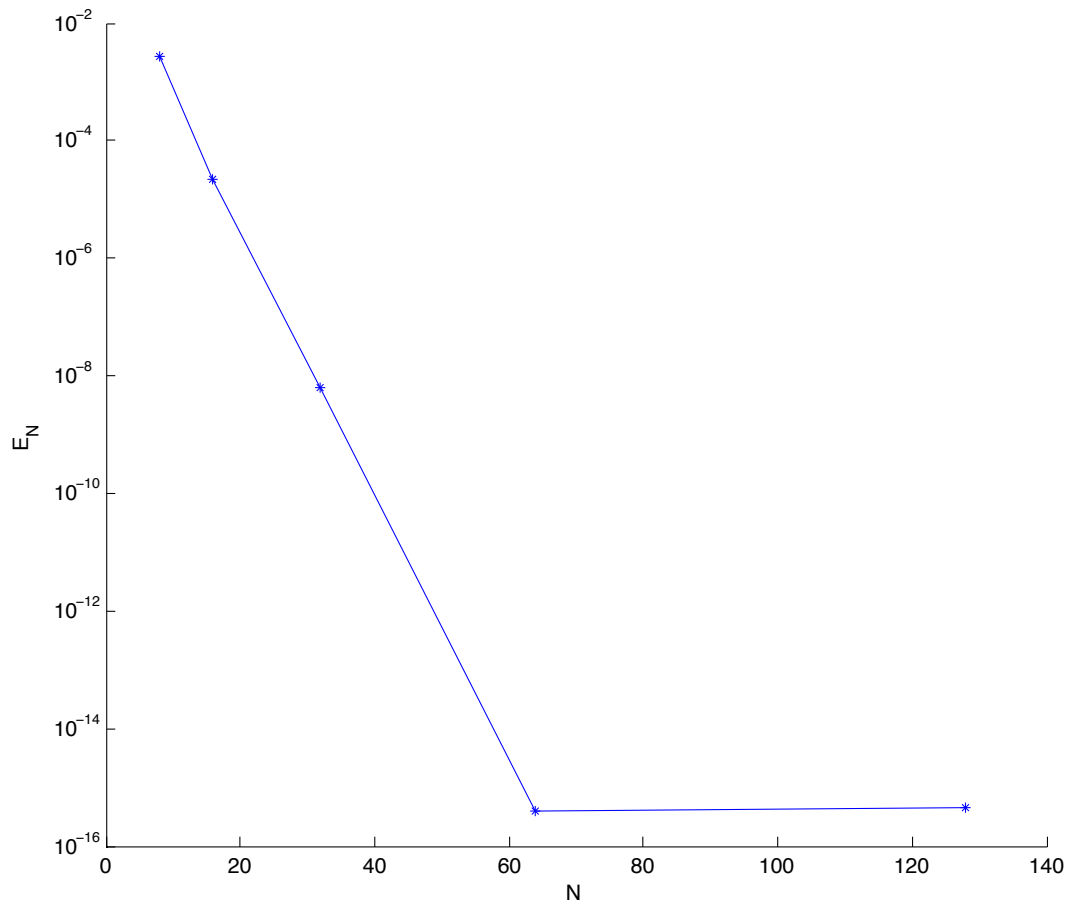


Σχήμα 3: Χρονική εξέλιξη του πικνότητας του όγκου $c(x, t)$.

Το σχετικό σφάλμα, που απεικονίζεται στο γράφημα 4, δίνεται από τη σχέση:

$$E_N := \frac{\|u_{N_{i+1}} - u_{N_i}\|_\infty}{\|u_{N_{i+1}}\|_\infty}$$

με N να δηλώνει τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης και u_N είναι η αντίστοιχη αριθμητική λύση. Παρατηρήστε την ταχεία πτώση του σφάλματος καθώς αυξάνονται τα σημεία ολοκλήρωσης.



Σχήμα 4: Το σχετικό σφάλμα E_N

4 Παραδοτέα

- Μ. Ασβεστάς, Α. Σηφαλάκης, Ε. Παπαδοπούλου, Ι. Σαριδάκης, "Fokas method for a multi-domain linear reaction-diffusion equation with discontinuous

diffusivity” , 2nd International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences 2013

- Μ. Ασβεστάς, "Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά στο μαθηματικό μοντέλο διάχυσης των καρκινικών κυττάρων σε $n+1$ εγκεφαλικές περιοχές", Μεταπτυχιακή Διατριβή 2013

5 Συνεργασίες

Για τα ερευνητικά αποτελέσματα της τρέχουσας περιόδου η ερευνητική ομάδα του Πολυτεχνείου Κρήτης (ΚΕΟ 1) αποτελείόμενη από τους καθ. Ι. Σαριδάκη, καθ. Ε. Παπαδοπούλου, Δρ. Σηφαλάκη Αναστάση, Δρ. Μ. Παπαδομανωλάκη καθώς και τον μεταπτυχιακό φοιτητή Μ. Ασβεστά, συνεργάστηκε με τον καθηγητή Α. Φωκά του Πανεπιστημίου Cambridge.

6 Μελλοντικές Δράσεις

- Επέκταση της μεθόδου Φωκά σε N περιοχές στις $1 + 1$ διαστάσεις με συνελεστή διάχυσης $D(x, t)$ εξαρτώμενο και από τον χρόνο.
- Επέκταση της μεθόδου Φωκά στις $2 + 1$ διαστάσεις.

Αναφορές

- [1] G.C.Cruywagen, D.E.Woodward, P.Tracqui, G.T.Bartoo, J.D.Murray, και E.C.Alvord Jr. The modeling of diffusive tumours, *Journal of Biological Systems*, (3):937-945, 1995.
- [2] Murray JD *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 2002
- [3] Swanson KR, Alvord EC Jr και Murray JD *A quantitative model for differential motility of gliomas in grey and white matter*, Cell Proliferation, 33, 317-329, 2000.
- [4] Mantzavinos D, Papadomanolaki MG, Saridakis YG και Sifalakis AG, *A novel transform approach for a brain tumor invasion model*



with heterogeneous diffusion in 1+1 dimensions, Applied Numerical Mathematics, submitted

- [5] K.R.Swanson Mathematical modeling of the growth and control of tumors, *PHD Thesis, University of Washington*, 1999.
- [6] K.R.Swanson, E.C.Alvord Jr και J.D.Murray Virtual brain tumours(gliomas) enhance the reality of medical imaging and highlight inadequacies of current therapy, *British Journal of Cancer*,86:14-18,2002.
- [7] K.R.Swanson,C.Bridge,J.D.Murray και E.C.Alvord Jr Virtual and real brain tumours:using mathematical modeling to quantify glioma growth and invasion, *J.Neurol.Sci*,216:1-10,2003.

