



Θαλής (ΜΙΣ:379416) Μέθοδος Φωκά για Ασυνεχή Προβλήματα

Διονύσιος Μαντζαβίνος¹, Παπαδοπούλου Έλενα²,
Παπαδομανωλάκη Μαριάννα², Σαριδάκης Γιάννης²,
Σηφαλάκης Τάσος², Ασβεστάς Μάριος²

¹Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Θεωρητικής Φυσικής
Πανεπιστήμιο Cambridge
Cambridge CB3 0WA, UK

²Εργαστήριο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Ηλεκτρονικών Υπολογιστών,
Πολυτεχνείο Κρήτης
Χανιά 73100,

Ιούλιος 2013



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



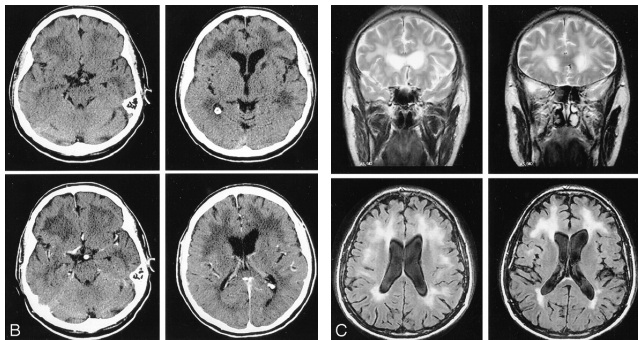
Επισκόπηση

Διάχυση Καρκινικών Όγκων στον Εγκέφαλο - Μέθοδος Φωκά

- ΜΔΕ μοντέλο (Swanson, Alvord και Murray - 2000)
 - Ανομοιογένεια εγκεφάλου
 - Εξίσωση διάχυσης με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης
- Μέθοδος Μετασχηματισμού Φωκά (Φωκάς - 1997)
 - Αναλυτική λύση - όχι ενδιάμεσα χρονικά βήματα
 - Flyer & Φωκάς (2008) - Παπαθεοδώρου & Κανδύλη (2009)
- Παρουσίαση
 - Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά σε ασυνεχή προβλήματα
 - Διερεύνηση αριθμητικής καταλληλότητας
 - Μια χωρική διάσταση 3 περιοχές
 - Μια χωρική διάσταση n περιοχές
 - Δυο χωρικές διαστάσεις (συνεχές πρόβλημα)



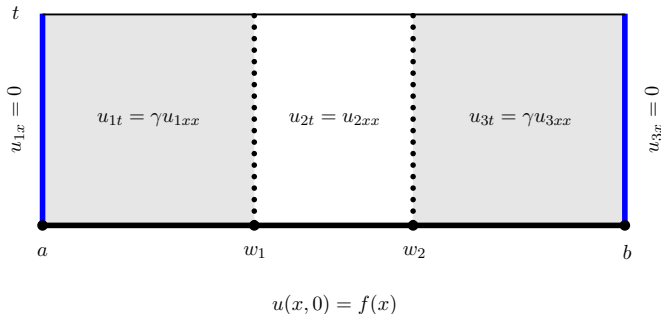
Φυσιολογία Εγκεφάλου



Σχήμα: American Journal of Neuroradiology



Πρόβλημα Πολλαπλών Πεδίων



- $u(x, t)$: $\approx$ πυκνότητα καρκινικών κυττάρων στο (x, t)
- Συνοριακές συνθήκες: **Μηδενική ροή**
- $f(x)$: αρχική χωρική κατανομή (άθροισμα Dirac's deltas)
- Πολλαπλών Πεδίων: u ικανοποιεί μια διαφορετική ΜΔΕ σε κάθε περιοχή



Μέθοδος Φωκά

ΜΔΕ

$$u_{1t} = \gamma u_{1xx}$$

Divergence μορφή

$$\left[e^{-ikx + \gamma k^2 t} u_1 \right]_t - \left[e^{-ikx + \gamma k^2 t} \gamma (u_{1x} + i\kappa u_1) \right]_x = 0, \quad k \in \mathbb{C}$$

Ολοκλήρωση στο $[a, w_1] \times [0, t]$

$$\int_a^{w_1} \int_0^t \left[e^{-ikx + \gamma k^2 s} u_1 \right]_s - \left[e^{-ikx + \gamma k^2 s} \gamma (u_{1x} + i\kappa u_1) \right]_x ds dx = 0$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green ...



Η Ολική Συνθήκη (στην Πρώτη Περιοχή)

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_1(k, t) = \hat{f}_1(k) + \gamma e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{1x}(w_1, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(w_1, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ika} [\tilde{u}_{1x}(a, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(a, \gamma k^2)]$$

$\hat{u}_1(k, t) = \int_a^{w_1} e^{-ikx} u_1(x, t) dx$		Μετασχηματισμός Fourier
$\hat{f}_1(r) = \int_a^{w_1} e^{-irx} f_1(x) dx$		Μετασχηματισμός Fourier
$\tilde{u}_1(*, \gamma k^2) = \int_0^t e^{\gamma k^2 s} u_1(*, s) ds$		t-μετασχηματισμός
$\tilde{u}_{1x}(*, \gamma k^2) = \int_0^t e^{\gamma k^2 s} u_{1x}(*, s) ds$		t-μετασχηματισμός



Οι Ολικές Συνθήκες (α)

1η περιοχή

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_1(k, t) = \hat{f}_1(k) + \gamma e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{1x}(w_1, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(w_1, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ika} [\tilde{u}_{1x}(a, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(a, \gamma k^2)]$$

2η περιοχή

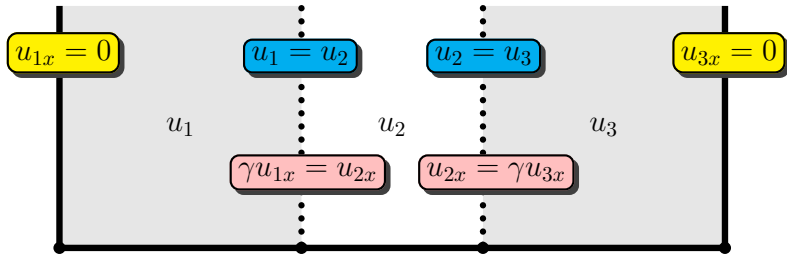
$$e^{k^2 t} \hat{u}_2(k, t) = \hat{f}_2(k) + e^{-ikw_2} [\tilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ik\tilde{u}_2(w_2, k^2)] \\ - e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{2x}(w_1, k^2) + ik\tilde{u}_2(w_1, k^2)]$$

3η περιοχή

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_3(k, t) = \hat{f}_3(k) + \gamma e^{-ikb} [\tilde{u}_{3x}(b, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_3(b, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ikw_2} [\tilde{u}_{3x}(w_2, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_3(w_2, \gamma k^2)]$$



Συνοριακές Συνθήκες - Συνθήκες Συμβατότητας





Οι Ολικές Συνθήκες (β)

1η περιοχή

$$e^{k^2 t} \hat{u}_1(ck, t) = \hat{f}_1(ck) + \gamma e^{-ickw_1} [\tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick\tilde{u}_1(w_1, k^2)] \\ - \gamma e^{-icka} ick\tilde{u}_1(a, k^2)$$

2η περιοχή

$$e^{k^2 t} \hat{u}_2(k, t) = \hat{f}_2(k) + e^{-ikw_2} [\tilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ik\tilde{u}_2(w_2, k^2)] - \\ - e^{-ikw_1} [\gamma \tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ik\tilde{u}_1(w_1, k^2)]$$

3η περιοχή

$$e^{k^2 t} \hat{u}_3(ck, t) = \hat{f}_3(ck) + \gamma e^{-ickb} ick\tilde{u}_3(b, k^2) \\ - \gamma e^{-ickw_2} \left[\frac{1}{\gamma} \tilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ick\tilde{u}_2(w_2, k^2) \right]$$

όπου $c = \gamma^{-1/2}$



Ολοκληρωτική Αναπαράσταση της Λύσης (1η περιοχή)

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = & \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ickx-k^2t} \widehat{f}_1(ck) dk \\ & - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ick(x-w_1)} e^{-k^2t} [\widetilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick \widetilde{u}_1(w_1, k^2)] dk \\ & - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ike^{ick(x-a)} e^{-k^2t} \widetilde{u}_1(a, k^2) dk \end{aligned}$$



Ολοκληρωτική Αναπαράσταση της Λύσης (2η περιοχή)

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-k^2t} \hat{f}_2(k) dk \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-w_2)} e^{-k^2t} [\tilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ik \tilde{u}_2(w_2, k^2)] dk \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-w_1)} e^{-k^2t} [\gamma \tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ik \tilde{u}_1(w_1, k^2)] dk \end{aligned}$$



Ολοκληρωτική Αναπαράσταση της Λύσης (3η περιοχή)

$$\begin{aligned} u_3(x, t) = & \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ickx - k^2 t} \hat{f}_3(ck) dk \\ & - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ick(x-b)} e^{-k^2 t} ik \tilde{u}_3(b, k^2) dk \\ & - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ick(x-w_2)} e^{-k^2 t} \left[\frac{1}{\gamma} \tilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ick \tilde{u}_2(w_2, k^2) \right] dk \end{aligned}$$



Άγνωστες Ποσότητες

Ερώτηση

Πως θα υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες?

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_1(k, t) = \hat{f}_1(k) + \gamma e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{1x}(w_1, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(w_1, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ika} [\tilde{u}_{1x}(a, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(a, \gamma k^2)]$$

Παρατηρείστε ότι ...

$$u_{1x}(w_1, \gamma k^2) = u_{1x}(w_1, \gamma (-k)^2)$$

Έτσι αντικαθιστούμε το k με το $-k$ στις τρεις ολικές συνθήκες και οδηγούμαστε σε ένα 6×6 γραμμικό σύστημα



Γραμμικό Σύστημα 6×6

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ick\gamma e^{-icka} & -\gamma ick e^{-ickw_1} & -\gamma e^{-ickw_1} & & & \\ -ick\gamma e^{icka} & \gamma ick e^{ickw_1} & -\gamma e^{ickw_1} & & & \\ & ike^{-ikw_1} & \gamma e^{-ikw_1} & -ike^{-ikw_2} & -e^{-ikw_2} & \\ & -ike^{ikw_1} & e^{ikw_1}\gamma & ike^{ikw_2} & -e^{ikw_2} & \\ & & & e^{-ickw_2} ick\gamma & e^{-ickw_2} & -ick\gamma e^{-ickb} \\ & & & -e^{ickw_2} ick\gamma & e^{ickw_2} & ick\gamma e^{ickb} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(ck) \\ \hat{f}_1(-ck) \\ \hat{f}_2(k) \\ \hat{f}_2(-k) \\ \hat{f}_3(ck) \\ \hat{f}_3(-ck) \end{bmatrix} - e^{k^2 t} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(ck, t) \\ \hat{u}_1(-ck, t) \\ \hat{u}_2(k, t) \\ \hat{u}_2(-k, t) \\ \hat{u}_3(ck, t) \\ \hat{u}_3(-ck, t) \end{bmatrix}$$



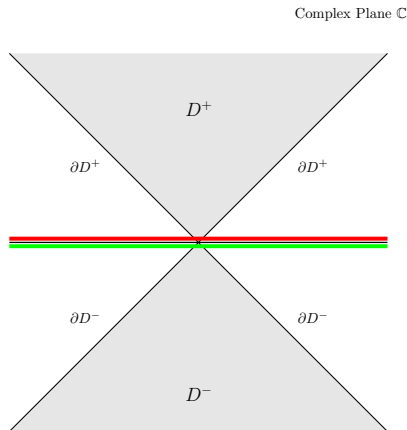
Μονοπάτια Ολοκλήρωσης

πραγματικός άξονας στο ∂D^+

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^+} U(k) dk$$

πραγματικός άξονας στο ∂D^-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^-} U(k) dk$$





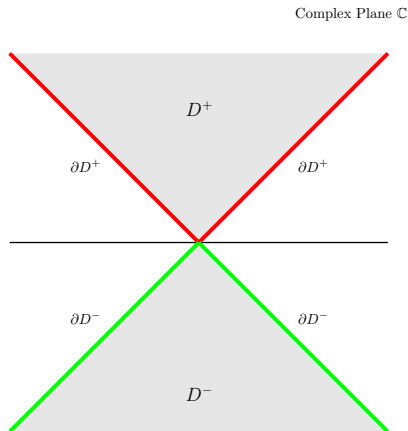
Μονοπάτια Ολοκλήρωσης

πραγματικός άξονας στο ∂D^+

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^+} U(k) dk$$

πραγματικός άξονας στο ∂D^-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^-} U(k) dk$$

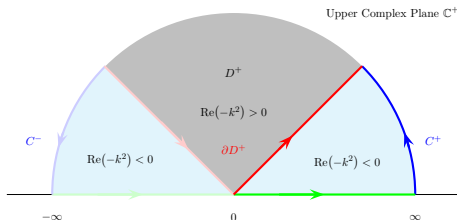




Μονοπάτια Ολοκλήρωσης (συν.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} i k e^{i k(x-a)} e^{-k^2 t} U(k) dk$$

- $e^{i k(x-a)}$ αναλυτική για $\text{Im}[k] \geq 0$
- $e^{-k^2 t}$ αναλυτική για $\text{Re}[-k^2] \leq 0$
- $D = \{k \in \mathbb{C} : \text{Re } k^2 < 0\}$
- $i k e^{i k(x-a)} e^{-k^2 t} U(k)$ αναλυτική στο $\mathbb{C}^+ \setminus D$



- Cauchy:

$$\int_{\text{πράσινο}} + \int_{\text{μπλέ}} - \int_{\text{κόκκινο}} = 0$$

- Jordan: $\int_{\text{μπλέ}} = 0$



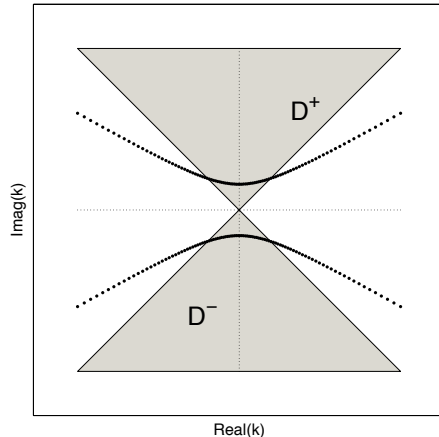
Υπερβολικά Μονοπάτια

Υπερβολή

$$\int_{\partial D^+} dk \longrightarrow \int_{\text{hyperbola}} dk$$

Παραμετροποίηση

$$k = k(\theta) = \pm i \sin(\beta - i\theta)$$





Ταχεία Πτώση

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\theta) d\theta \approx \int_{-R}^R U(\theta) d\theta$$

Ερώτηση

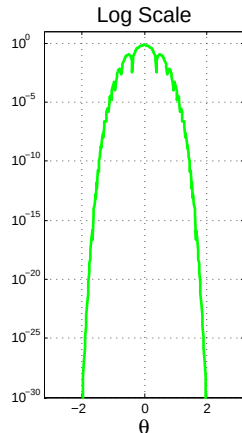
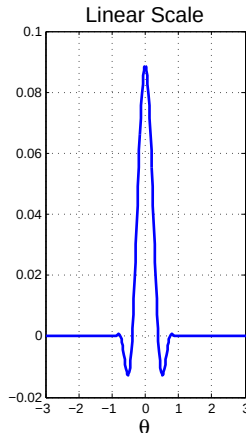
Πώς να επιλέξουμε το R?

$$\int_{-R}^R e^{ick(x-a)} e^{-k^2 t} U(k) dk$$

Απάντηση

$$\|e^{-k^2 t}\| \leq 10^{-M} \implies$$

$$R = \frac{1}{2} \ln \frac{4t+8M \ln 10}{t}$$



Σχήμα: Πραγματικό μέρος ολοκληρωτέου



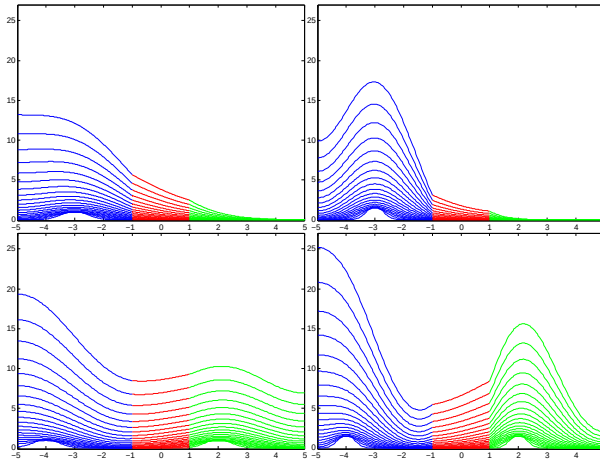
Επαναλαμβανόμενοι Υπολογισμοί

$$\begin{aligned}
 u_1(\mathbf{x}_1, t) = & \dots + \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_1}^{R_1} e^{ick(\mathbf{x}_1 - w_1)} e^{-k^2 t} [\tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick\tilde{u}_1(w_1, k^2)] d\theta \\
 & - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_2}^{R_2} ike^{ick(\mathbf{x}_1 - a)} e^{-k^2 t} \tilde{u}_1(a, k^2) d\theta \\
 u_1(\mathbf{x}_2, t) = & \dots + \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_3}^{R_3} e^{ick(\mathbf{x}_2 - w_1)} e^{-k^2 t} [\tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick\tilde{u}_1(w_1, k^2)] d\theta \\
 & - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_4}^{R_4} ike^{ick(\mathbf{x}_2 - a)} e^{-k^2 t} \tilde{u}_1(a, k^2) d\theta
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε κανόνα ολοκλήρωσης με τα ίδια σημεία ολοκλήρωσης για όλα τα διαφορετικά χωρικά σημεία (x_i, t)



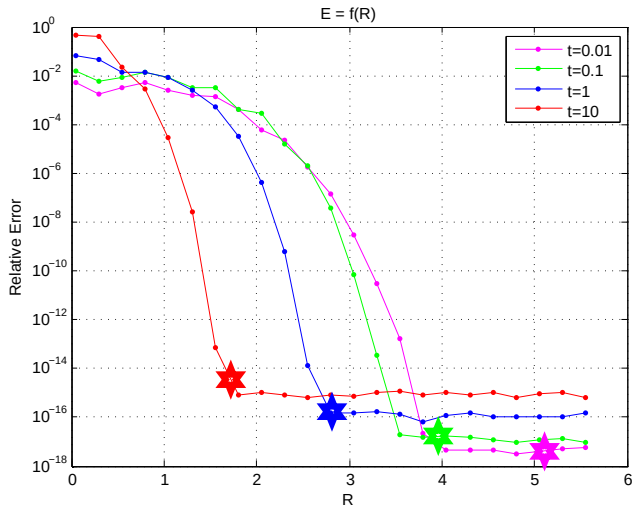
Ομαλές Λύσεις



Σχήμα: Χρονική εξέλιξη της πυκνότητας των κυττάρων για μια/δύο πηγές, για $\gamma = 0.5/\gamma = 0.2$ για $t = 0.2 : 0.2 : 4$

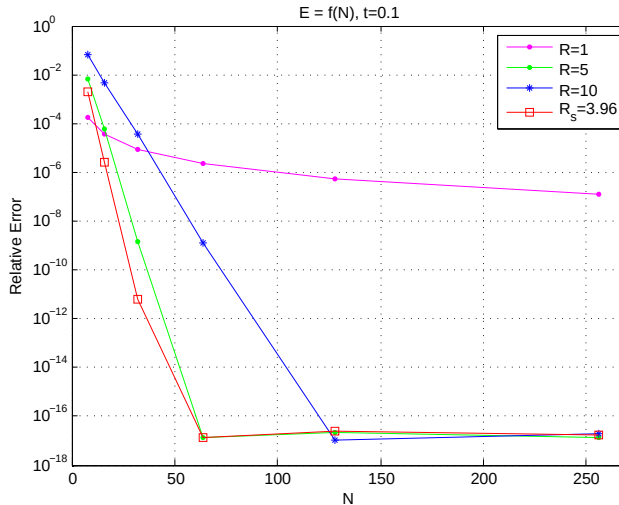


Επιλογή του R: $R = \frac{1}{2} \ln \frac{4t+8M \ln 10}{t}$



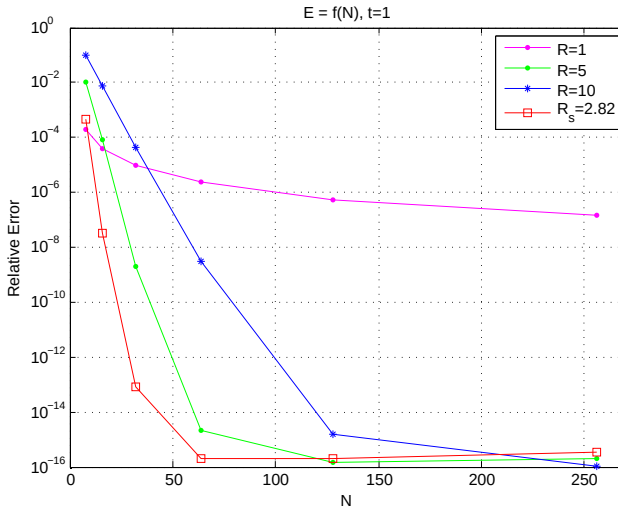


Κανόνας Τραπεζίου: Τάξη Σύγκλισης ($t = 0.1$)





Κανόνας Τραπεζίου: Τάξη Σύγκλισης ($t = 1$)



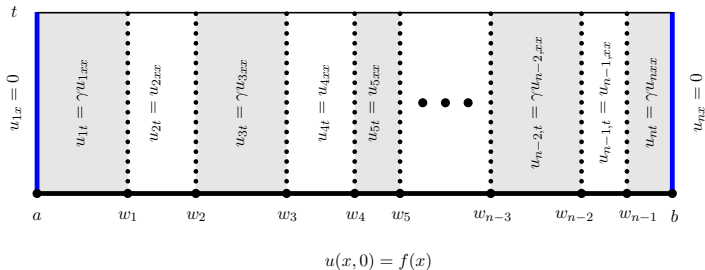


Ανακεφαλαίωση I

- ΜΔΕ
- Divergence Μορφή
- Ολοκλήρωση στο (x, t) χωρίο
- Θεώρημα Green
- Ολική Συνθήκη
- Αντίστροφος Fourier
- Ολοκληρωτική μορφή λύσης
- Συνθήκες συνοριακές/συμβατότητας
- Επιπλέον ολικές συνθήκες/σύστημα 6×6
- Μονοπάτια ολοκλήρωσης
- Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης
- Κανόνας ολοκλήρωσης



n Περιοχές



- $u(x, t)$: $\approx$ πυκνότητα καρκινικών κυττάρων στο (x, t)
- Συνοριακές συνθήκες: **Μηδενική ροή**
- $f(x)$: αρχική χωρική κατανομή (άθροισμα Dirac's deltas)
- Πολλαπλών Πεδίων: u ικανοποιεί μια διαφορετική ΜΔΕ σε κάθε περιοχή



n Περιοχές - Ολοκληρωτική Λύση

$$\begin{aligned}
 u_j(x, t) &= \frac{c_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k x - k^2 t} \widehat{f_j}(c_j k) dk \\
 &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k (x - w_{j-1}) - k^2 t} [\widetilde{u}_{jx}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}_j(w_{j-1}, k^2)] dk \\
 &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k (x - w_j) - k^2 t} [\widetilde{u}_{jx}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}_j(w_j, k^2)] dk \\
 c_j &= \begin{cases} \gamma^{-\frac{1}{2}}, & j = 1, 3, 5, \dots \\ 1, & j = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$



n Περιοχές - Γραμμικό Σύστημα $(2n) \times (2n)$

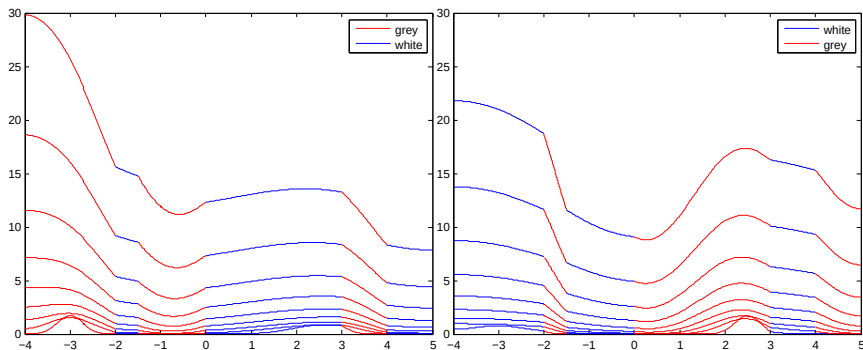
$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{W}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B^1 & D^1 & E^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F^1 & H^1 & I^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & C^2 & D^2 & E^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F^2 & G^2 & H^2 & I^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B^{n-1} & C^{n-1} & D^{n-1} & E^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F^{n-1} & G^{n-1} & H^{n-1} & I^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B^n & C^n & D^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & F^n & G^n & H^n \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} B^j = +ic_j\gamma_jke^{-ic_jkw_{j-1}} \\ D^j = -ic_j\gamma_jke^{-ic_jkw_j} \\ F^j = -ic_j\gamma_jke^{ic_jkw_{j-1}} \\ H^j = +ic_j\gamma_jke^{ic_jkw_j} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} C^j = +\gamma_{j-1}e^{-ic_jkw_{j-1}} \\ E^j = -\gamma_je^{-ic_jkw_j} \\ G^j = +\gamma_{j-1}e^{ic_jkw_{j-1}} \\ I^j = -\gamma_je^{ic_jkw_j} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \gamma_j = \gamma, \quad j = 1, 3, 5, \dots \\ \gamma_j = 1, \quad j = 2, 4, 6, \dots \\ w_0 = a \\ w_n = b \end{array} \right|$$



n Περιοχές



Σχήμα: Χρονική εξέλιξη της πυκνότητας των κυττάρων για $\gamma = 0.2$ για $t = 0.2 : 0.2 : 4$ σε grey-white-grey-.... και white-grey-white,... περιοχές



Δυο Διαστάσεις

- Καλημέρης & Φωκάς (2009)
- Εξίσωση Θερμότητας $\mathbb{R}^2 \times t$

$$q_t - q_{x_1 x_1} - q_{x_2 x_2} = f$$

- Dirichlet Συνοριακές Συνθήκες

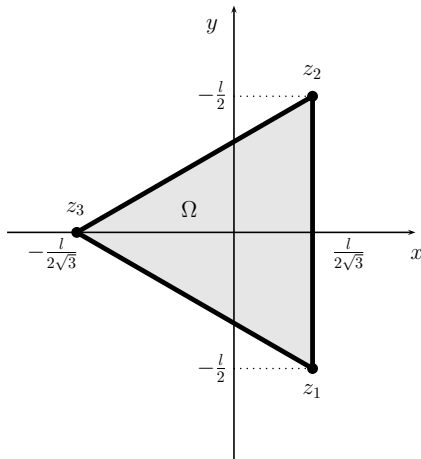
$$q(\text{πλευρά-1}, t) = f_1(s, t)$$

$$q(\text{πλευρά-2}, t) = f_2(s, t)$$

$$q(\text{πλευρά-3}, t) = f_3(s, t)$$

- Αρχική Συνθήκη

$$q(x_1, x_2, 0) = q_0(x_1, x_2)$$





Δυο Διαστάσεις (συν.)

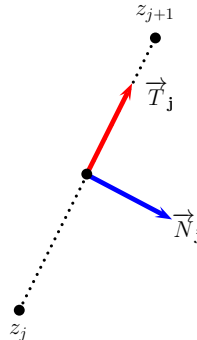
$$kx = k_1x_1 + k_2x_2$$

$$w(k) = k_1^2 + k_2^2$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} \mu_j = (k_1, k_2) \cdot \vec{T}_j \\ \lambda_j = (k_1, k_2) \cdot \vec{N}_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_j = (x_1, x_2) \cdot \vec{T}_j \\ \eta_j = (x_1, x_2) \cdot \vec{N}_j \end{cases}$$



Σχήμα: Τοπικό σύστημα αξόνων



Δυο Διαστάσεις - Ολοκληρωτική Λύση

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx - w(k)t} Q(k_1, k_2, t) dk_2 dk_1 \\
 & - \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial D^-} k_1 e^{-ik_1 \frac{l}{2\sqrt{3}} - w(k)t} \sum_{j=1}^3 G_j(k_2, k_1^2, t) P_j(k_1, k_2, x_1, x_2) dk_1 dk_2 \\
 & + \frac{i}{2(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial D^-} e^{-ik_1 \frac{l}{2\sqrt{3}} - w(k)t} \sum_{j=1}^3 \frac{\tilde{G}_j(k_1, k_2, t) P_j(k_1, k_2, x_1, x_2)}{\sin\left[(\sqrt{3}k_1 + k_2) \frac{l}{4} + (j-1) \frac{2\pi}{3}\right]} dk_1 dk_2 \\
 & - \frac{1}{4(2\pi)^2} \int_{\partial D^+} \int_{\partial D^-} e^{-ik_1 \frac{l}{2\sqrt{3}}} e^{ik_2 \frac{l}{2}} e^{-w(k)t} \\
 & \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{\tilde{G}_j(k_2, k_1, t) P_j(k_1, k_2, x_1, x_2)}{\sin\left[(k_2 \frac{l}{2} + (j-1) \frac{2\pi}{3})\right] \sin\left[(\sqrt{3}k_1 + k_2) \frac{l}{4} + (j-1) \frac{2\pi}{3}\right]} dk_1 dk_2
 \end{aligned}$$



Δυο Διαστάσεις - Ολοκληρωτική Λύση (συν.)

$$P_1(k_1, k_2, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^3 e^{i(k_2 \xi_j + k_1 \eta_j)}$$

$$P_2(k_1, k_2, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^3 a^{j-1} e^{i(k_2 \xi_j + k_1 \eta_j)}$$

$$P_3(k_1, k_2, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^3 \bar{a}^{j-1} e^{i(k_2 \xi_j + k_1 \eta_j)}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_1(k_1, k_2, t) &= e^{-i\lambda_3 \frac{l}{2\sqrt{3}}} Q_1(-k_1, k_2, t) - e^{i\lambda_3 \frac{l}{2\sqrt{3}}} Q_1(k_1, k_2, t) \\ &\quad - 2i\lambda_1 \cos\left(\mu_2 \frac{l}{2}\right) G_1(\mu_1, \lambda_1^2, t) \\ &\quad - 2i\lambda_2 \cos\left(\mu_1 \frac{l}{2}\right) G_1(\mu_2, \lambda_2^2, t) - 2i\lambda_3 G_1(\mu_3, \lambda_3^2, t) \end{aligned}$$



Δυο Διαστάσεις - Ολοκληρωτική Λύση (συν.)

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_2(k_1, k_2, t) &= \bar{a}e^{-i\lambda_3 \frac{l}{2\sqrt{3}}} Q_2(-k_1, k_2, t) - ae^{i\lambda_3 \frac{l}{2\sqrt{3}}} Q_2(k_1, k_2, t) \\ &\quad - 2i\lambda_1 \cos\left(\mu_2 \frac{l}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) G_2(\mu_1, \lambda_1^2, t) \\ &\quad - 2i\lambda_2 \cos\left(\mu_1 \frac{l}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) G_1(\mu_2, \lambda_2^2, t) - 2i\lambda_3 G_1(\mu_3, \lambda_3^2, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_3(k_1, k_2, t) &= ae^{-i\lambda_3 \frac{l}{2\sqrt{3}}} Q_3(-k_1, k_2, t) - \bar{a}e^{i\lambda_3 \frac{l}{2\sqrt{3}}} Q_3(k_1, k_2, t) \\ &\quad - 2i\lambda_1 \cos\left(\mu_2 \frac{l}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) G_3(\mu_1, \lambda_1^2, t) \\ &\quad - 2i\lambda_2 \cos\left(\mu_1 \frac{l}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) G_3(\mu_2, \lambda_2^2, t) - 2i\lambda_3 G_3(\mu_3, \lambda_3^2, t)\end{aligned}$$



Δυο Διαστάσεις - Ολοκληρωτική Λύση (συν.)

$$Q_j(k_1, k_2, t) = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} \int_0^t e^{-ikx + w(k)\tau} f(x_1, x_2, \tau) d\tau dx_1 dx_2 \\ + \iint_{\Omega} e^{-ikx} q_j(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$Q(k_1, k_2, t) = \iint_{\Omega} e^{-ikx} q_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ + \iint_{\Omega} \int_0^t e^{-ikx + w(k)\tau} f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 d\tau$$

$$G_j(k_2, k_1^2, t) = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^t e^{-ik_2 s + (k_2^2 + k_1^2)\tau} g_j(s, \tau) ds d\tau$$



Δυο Διαστάσεις - Ολοκληρωτική Λύση (συν.)

$$\begin{bmatrix} q_1(s, t) \\ q_2(s, t) \\ q_3(s, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 91 & \bar{a} & a \\ 1 & a & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(x_1, x_2) \\ q_0 \left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right) \\ q_0 \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_1(s, t) \\ g_2(s, t) \\ g_3(s, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{a} & a \\ 1 & a & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s, t) \\ f_2(s, t) \\ f_3(s, t) \end{bmatrix}$$

$$a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



Συμπεράσματα

- Μια Χωρική Διάσταση
 - Επεκτείνεται αβίαστα σε προβλήματα πολλαπλών πεδίων
 - Αναλυτική λύση (σε ολοκληρωτική μορφή)
 - Δεν χρειάζεται η λύση σε προηγούμενα χρονικά βήματα
 - Ομαλή αριθμητική λύση
 - Ανταγωνιστική με συνήθους μεθόδους (π.χ. collocation με Crank Nicolson)
 - Μη γραμμικοί όροι ?
- Δυο Χωρικές Διαστάσεις
 - Ισόπλευρο τρίγωνο - συνεχές πρόβλημα : αναλυτική λύση
 - Αριθμητική λύση ?
 - Ασυνεχές πρόβλημα ?
 - Σκαληνό τρίγωνο/Ορθογώνιο ?
 - Ασυνεχές πρόβλημα ?
 - Μη γραμμικοί όροι ?