Τελική Τεχνική Έκθεση

Έτος 2015



ΘΑΛΗΣ – Πολυτεχνείο Κρήτης

Πλατφόρμα προηγμένων μαθηματικών μεθόδων και λογισμικού για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών πεδίων (multi physics, multidomain) σε σύγχρονες υπολογιστικές αρχιτεκτονικές: Εφαρμογή σε προβλήματα Περιβαλλοντικής Μηχανικής και Ιατρικής (MATENVMED - MIS 379416)

Δράση 4.3

Επικύρωση Αποτελεσμάτων σε Προβλήματα Περιβαλλοντικής Μηχανικής



Περιεχόμενα

1	Σκο	πός		4
	1.1	Στοχα	σική Βελτιστοποίηση ALOPEX για Αναλυτικά Μοντέλα Πα-	
		ράκτιυ	υν Υδροφορέων	4
	1.2	Συνδυ	ασμός ALOPEX με πλατφόρμες PTC και FEniCS και τη μέ-	
		θοδο Ι	ΗC για δεδομένα πεδίου.	5
•			,	•
2	H2H	00000	για	6
	2.1	Στοχα	σική βελτιστοποιήση ΑLOPEX για Αναλυτικά Μοντελά Ι Ια-	~
		ρακτιο		6
		2.1.1	γφαλμυριση παρακτίων υοροφορεών	6
		2.1.2		1
		2.1.3	Αναλυτική λύση	8
		2.1.4	Διαδικασία στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX	9
		2.1.5	ΑLOPEX βελτιστοποίηση με χρήση περιορισμών	10
		2.1.6	Κριτήρια Τερματισμού	11
		2.1.7	Αριθμητικές προσομοιώσεις - Αποτελέσματα	11
	2.2	Συνδυ	ασμός ALOPEX με πλατφόρμα PTC για δεδομένα πεδίου.	13
		2.2.1	PTC - Princeton Transport Code	13
		2.2.2	Περιοχή μελέτης και αριθμητική μοντελοποίηση	14
		2.2.3	Διαδικασία βελτιστοποίησης διαχείρισης αντλήσεων	16
		2.2.4	Στρατηγικές ασφάλειας	16
		2.2.5	ΑLOPEX βελτιστοποίηση με χρήση περιορισμών	17
		2.2.6	Αριθμητικές προσομειώσεις	18
		2.2.7	Αποτελέσματα ALOPEX/PTC διαχείρισης υδροφορέα Χερ-	
			σονήσου	21
	2.3	Συνδυ	ασμός ALOPEX με πλατφόρμα FEniCS για δεδομένα πεδίου.	22
		2.3.1	Υδροφορέας Καλύμνου	22
		2.3.2	Υδροφορέας Χερσονήσου Κρήτης	23
		2.3.3	Αλγόριθμος σχεδίασης μετώπου υφαλμύρισης	24
		2.3.4	Αποτελέσματα ALOPEX/FEniCS διαχείρισης υδροφορέα	
			Καλύμνου	25
		2.3.5	Αποτελέσματα ALOPEX/FEniCS διαχείρισης υδροφορέα	
			Χερσονήσου Κρήτης	29
	2.4	Αποτε	λέσματα ALOPEX/Collocation διαχείρισης υδροφορέα Κα-	
		λύμνο	U	31
		2.4.1	Hermite Collocation	31
		2.4.2	Αριθμητικές προσομοιώσεις και αποτελέσματα	33
3	Μελ	λοντικ	ές Δράσεις	35



Τελική Τεχνική Έκθεση		
4	Παραδοτέα	35
5	Συνεργασίες	36



1 Σκοπός

Η διείσδυση υφάλμυρου ύδατος στο εσωτερικό ενός υδροφορέα (φαινόμενο υφαλμύρισης) συνιστά σημαντική απειλή για την ποιότητα των υπόγειων αποθεματικών γλυκού νερού σε παράκτιες περιοχές. Πρόκειται για φαινόμενο, το μέγεθος του οποίου ενισχύεται κατά τους καλοκαιρινούς μήνες, κυρίως στις περιοχές με αυξημένο τουρισμό, με ιδιαίτερα αρνητικές οικονομικές συνέπειες.

Με στόχο την προστασία των αποθεματικών των παράκτιων υδροφορέων και το σχεδιασμό μιας στρατηγικής αειφόρου διαχείρισης του νερού σε αυτούς, οι ερευνητές έχουν επικεντρωθεί στη συνδυασμένη χρήση μαθηματικών μοντέλων με αριθμητικές προσομοιώσεις και αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

Κεντρική επιδίωξη της παρούσας δράσης αποτελεί αφενός μεν η επικύρωση των αποτελεσμάτων μας στο σημαντικό αυτό περιβαλλοντικό πρόβλημα, αφετέρου δε την ανάπτυξη αλγορίθμων στοχαστικής βελτιστοποίησης και μελέτη της βέλτιστης διαχείρισης παράκτιων υδροφορέων. Στα πλαίσια αυτά, κύριοι άξονες των ερευνητικών αποτελεσμάτων κατά τη διάρκεια του έργου απετέλεσαν οι:

- Ανάπτυξη/προσαρμογή και μελέτη συμπεριφοράς του στοχαστικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης Algorithm of Pattern Extraction (ALOPEX) για βέλτιστη διαχείριση της άντλησης από παράκτιους υδροφορείς,
- Συνδυασμός του αλγορίθμου ALOPEX αφενός μεν με τις πλατφόρμες λογισμικού PTC και FEniCS, αφετέρου δε με την μέθοδο collocation HC (Δράση 2.1), με στόχο την ολοκληρωμένη αριθμητική διαχείριση του προβλήματος διείσδυσης υφάλμυρου νερού σε παράκτιους υδροφορείς και ιδιαίτερα των υδροφορέων της Χερσονήσου Ηρακλείου Κρήτης και του Βαθέως Καλύμνου.

1.1 Στοχασική Βελτιστοποίηση ALOPEX για Αναλυτικά Μοντέλα Παράκτιων Υδροφορέων

Η βέλτιστη διαχείριση της άντλησης από παράκτιους υδροφορείς, ώστε μπορούν να αποδώσουν το μέγιστο δυνατό όγκο γλυκού νερού χωρίς τον κίνδυνο διείσδυσης υφάλμυρου νερού, αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο για την αντιμετώπιση του προβλήματος της υφαλμύρισής τους. Με την συνδρομή αναλυτικών μοντέλων μαθηματικής περιγραφής της ροής του νερού σε ορθογώνιους υπόγειους παράκτιους υδροφορείς αναπτύξαμε και μελετήσαμε μία νέα μορφή του στοχαστικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης ALOPEX καθώς και ενός πλήρους συστήματος κυρώσεων για την επιβολή των περιοριστικών συνθηκών του προβλήματος.

Στην κατεύθυνση αυτή οι ερευνητικοί μας στόχοι εξειδικεύονται ως εξής:



- Εισαγωγή μίας νέας αντικειμενικής συνάρτησης κόστους, ικανής να συνδυάζεται με διαδικασίες feedback.
- Ανάπτυξη μίας νέας μορφής του αλγορίθμου ALOPEX με μεταβλητές παραμέτρους.
- Βελτιστοποίηση των παραμέτρων του αλγορίθμου ALOPEX ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλισή του.
- Κατασκευή ενός αποτελεσματικού συστήματος penalty για τον έλεγχο εξέλιξης της διαδικασίας βελτιστοποίησης ALOPEX.
- Κατασκευή κριτηρίων τερματισμού της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Η συμπεριφορά και η αποδοτικότητα της νέας αυτής διαδικασίας βελτιστοποίησης διερευνήθηκαν διεξοδικά μέσα από την εξέταση ενός πλήθους σεναρίων άντλησης και καιρικών συνθηκών, σε έναν υδροφορέα ορθογώνιας γεωμετρίας που προσομοιώνει έναν πραγματικό υδροφορέα στην περιοχή Βαθύ Καλύμνου.

1.2 Συνδυασμός ALOPEX με πλατφόρμες PTC και FEniCS και τη μέθοδο HC για δεδομένα πεδίου.

Με στόχο την επικύρωση μεθόδων και λογισμικού καθώς και τη μελέτη της συμπεριφοράς τους σε δεδομένα πεδίου συνδυάσαμε την μέθοδο στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX με:

- την πλατφόρμα λογισμικού PTC (Princeton Transport Code) με εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα της Χερσονήσου στο Ηράκλειο Κρήτης.
- την πλατφόρμα λογισμικού FEniCS με εφαρμογή σε ομογενείς και ετερογενείς ορθογώνιες προσεγγίσεις του παράκτιου υδροφορέα στην περιοχή Βαθύ Καλύμνου αλλά και δισδιάστατες προσεγγίσεις του παράκτιου υδροφορέα της Χερσονήσου στο Ηράκλειο Κρήτης.
- την μέθοδο HC με εφαρμογή σε ομογενείς και ετερογενείς προσεγγίσεις του παράκτιου υδροφορέα στην περιοχή Βαθύ Καλύμνου.

Επισημαίνουμε ότι για την προστασία των υδροφορέων αναπτύσσονται κατάλληλες στρατηγικές ελέγχου του μετώπου υφαλμύρισης και διατήρησής του σε απόσταση ασφαλείας από οριοθετημένες περιοχές γύρω από κάθε γεώτρηση.



2 Μεθοδολογία

2.1 Στοχασική Βελτιστοποίηση ALOPEX για Αναλυτικά Μοντέλα Παράκτιων Υδροφορέων

2.1.1 Υφαλμύριση παράκτιων υδροφορέων

Η ροή του νερού στο εσωτερικό ενός υδροφορέα είναι μια σύνθετη διαδικασία, καθώς συνυπάρχουν δύο διαφορετικές καταστάσεις του νερού, με υδραυλικές ιδιότητες που εμφανίζουν μεγάλη διακύμανση κατά μήκος του υδροφορέα. Στην παρούσα εργασία ακολουθούμε τη μοντελοποίηση που συναντάμε στο [15], η οποία βασίζεται:

- στην προσέγγιση Sharp Interface, δηλαδή δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει απευθείας ανάμειξη γλυκού και αλμυρού νερού στο εσωτερικό του υδροφορέα
- στην εξίσωση των Ghyben-Herzberg, δηλώνοντας έτσι ότι η ροή του νερού προσεγγίζει την steady state κατάσταση.





Πιο αναλυτικά, η sharp interface είναι μια υδραυλική προσέγγιση, όπου μόνο οι τιμές της υδραυλικής κεφαλής στην περιοχή του υδροφορέα απαιτούνται για τον υπολογισμό της έκτασης της υφάλμυρης εισβολής, σε αντίθεση με άλλες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν μετρήσεις χλωριούχων αλάτων ή μετρήσεις ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Η κύρια υπόθεση είναι ότι η ζώνη ανάμιξης μεταξύ των δύο μη αναμίξιμων υγρών (φρέσκο και αλατούχο νερό), τα οποία έχουν διαφορετικές πυκνότητες, περιορίζεται σε μια περιοχή μικρού πλάτους. Η θέση της απότομης περιοχής αυτής μεταξύ των δύο ρευστών, καθορίζεται από τη διαφορά των τιμών των υδραυλικών κεφαλών μεταξύ του υφάλμυρου και του γλυκού νερού καθώς από τον όγκο του γλυκού νερού που ρέει προς την ακτογραμμή από



το εσωτερικό της χώρας (βλέπε [26]). Η θέση του υφάλμυρου μετώπου προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση των Ghyben-Herzberg:

$$h_f - d = \delta \xi$$
, $\delta := \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \approx 0.025$ (1)

όπου ρ_s και ρ_f δηλώνουν τις πυκνότητες του αλατισμένου και του γλυκού νερού αντίστοιχα.

2.1.2 Οι εξισώσεις του μαθηματικού μοντέλου

Η βασική εξίσωση του μοντέλου είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K b \frac{\partial h_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K b \frac{\partial h_f}{\partial y} \right) + N - Q = 0,$$
(2)

όπου το b ικανοποιεί τις σχέσεις:

Zone 1:
$$b = h_f$$
,
Zone 2: $b = h_f - d + \xi$. (3)

Το δυναμικό ροής $\phi = \phi(x, y)$ (βλέπε [15, 21]) στο εσωτερικό του υδροφορέα ορίζεται ως εξής:

Zone 1:
$$\phi = \frac{1}{2} (h_f^2 - (1+\delta)d^2),$$

Zone 2: $\phi = \frac{1+\delta}{2\delta} (h_f - d)^2,$
(4)

ενώ στην περιοχή του μετώπου της υφάλμυρης σφήνας, όπου $\xi = d$:

$$\phi_{\tau} = \phi(x_{\tau}, y_{\tau}) = \frac{(1+\delta)\delta}{2}d^2$$
 (5)

Το δυναμικό ροής $\phi = \phi(x, y)$ είναι μια συνεχής και ομαλή συνάρτηση κατά μήκος του συνόρου των ζωνών 1 και 2, ικανοποιώντας την εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + N - Q = 0, \tag{6}$$

με Dirichlet συνοριακές συνθήκες $\phi = 0$ κατά μήκος της ακτογραμμής (x = 0) και Neumann συνοριακές συνθήκες $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ στις περιοχές όπου δεν εμφανίζεται εισροή ύδατος στον υδροφορέα.



Εάν οι τιμές των παραμέτρων K, N, Q και οι συνοριακές συνθήκες είναι γνωστές, η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ως προς $\phi(x, y)$, χρησιμοποιώντας αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους.

Zone 1: z = 0, $h_f = \sqrt{2\phi + (1+\delta)d^2}$, for $\frac{(1+\delta)\delta}{2}d^2 \le \phi$, Zone 2: $z = d - \xi$, $\xi = \sqrt{\frac{2\phi}{\delta(1+\delta)}}$ and $h_f = \sqrt{\frac{2\delta\phi}{1+\delta}} + d$, for $0 \le \phi \le \frac{(1+\delta)\delta}{2}d^2$, (7)

Το μέτωπο της υφάλμυρης σφήνας μπορεί να υπολογισθεί, επιλύοντας ως προς x_τ την μη-γραμμική εξίσωση (5) που παρουσιάσαμε παραπάνω.

2.1.3 Αναλυτική λύση

Ως αρχική προσέγγιση, εξετάζουμε στην παρούσα εργασία ομοιογενείς υδροφορείς (ως προς την παράμετρο της υδραυλικής αγωγιμότητας), ορθογώνιας γεωμετρίας, πεπερασμένου μεγέθους, με ένα άκρο στη θάλασσα και τρία άλλα αδιαπέραστα σύνορα (βλέπε Σχήμα 2). Η αναλυτική λύση του δυναμικού ροής



Σχήμα 2: Ομοιογενής υδροφορέας ορθογώνιας γεωμετρίας.

που παρουσιάζεται στις εργασίες των Strack [21] και Μαντόγλου [15], χρησιμοποιείται στο σημείο αυτό ως βασική εξίσωση εργασίας:

$$\phi(x,y) = \frac{q}{K}x + \frac{N}{K}x(L - \frac{x}{2}) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{M}\frac{Q_{j}}{4\pi K}ln\left(\frac{a_{i,j}(x) + b_{k,j}(y)}{a_{i+1,j}(x) + b_{k,j}(y)}\right) + \sum_{n=1}^{2}\sum_{k=3}^{6}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{M}\frac{Q_{j}}{4\pi K}ln\left(\frac{a_{i,j}(x) + b_{k,n,j}(y)}{a_{i+1,j}(x) + b_{k,n,j}(y)}\right)$$
(8)



όπου

$$\begin{array}{ll}
 a_{1,j}(x) := (x - x_j)^2 & b_{1,j}(y) := (y - y_j)^2 \\
 a_{2,j}(x) := (x + x_j)^2 & b_{2,j}(y) := (y + y_j)^2 \\
 a_{3,j}(x) := (x - (2L - x_j))^2 & b_{3,n,j}(y) := (y - (2nB - y_j))^2 \\
 a_{4,j}(x) := (x - (2L + x_j))^2 & b_{4,n,j}(y) := (y - (2nB + y_j))^2 \\
 a_{5,j}(x) := (x + (2L + x_j))^2 & b_{5,n,j}(y) := (y + (2nB - y_j))^2 \\
 a_{6,j}(x) := (x + (2L - x_j))^2 & b_{6,n,j}(y) := (y + (2nB + y_j))^2
\end{array}$$
(9)

Τα Q_j δηλώνουν ρυθμούς άντλησης (m^3/day) της j^{th} ενεργούς γεώτρησης w_j , $j = 1, \ldots, M$, με συντεταγμένες (x_j, y_j) .

2.1.4 Διαδικασία στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης της διαδικασίας αντλήσεων λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

max:
$$P \equiv P(\boldsymbol{Q}) = e^{-\left[S(\overline{\boldsymbol{Q}}) - S(\boldsymbol{Q})\right]^2 / S^2(\overline{\boldsymbol{Q}})} \in [0, 1]$$

s.t.:
$$0 \leq \underline{Q_i} \leq Q_i \leq \overline{Q_i} < Q_A$$
$$S(\boldsymbol{Q}) = \sum_{i=1}^M Q_i \leq Q_A$$
$$x_{\tau,i} \leq x_i - d_s, \ i = 1, \dots, M$$
(10)

όπου P δηλώνει την αντικειμενική συνάρτηση, $\underline{Q_i}$ και $\overline{Q_i}$ είναι οι ελάχιστες και μέγιστες δυνατότητες αντλήσεως, αντίστοιχα, της i^{th} γεωτρήσεως, Q_A είναι η συνολική δυνατότητα αντλήσεως από ολόκληρο τον υδροφορέα, $x_{\tau,i}$ είναι η x-συντεταγμένη του υφάλμυρου μετώπου απέναντι από την i^{th} γεώτρηση και d_s μια προκαθορισμένη απόσταση ασφάλειας.

Ο αλγόριθμος στοχαστικής βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούμε, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, είναι η έκδοση ALOPEX V, με εξίσωση:

$$\boldsymbol{Q}^{(k)} = \boldsymbol{Q}^{(k-1)} + c_k \Delta P^{(k-1)} \Delta \boldsymbol{Q}^{(k-1)} + \boldsymbol{g}^{(k)} , \quad k = 2, 3, \dots$$
(11)

όπου

$$\Delta \mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} - \mathbf{Q}^{(k-1)}$$

$$\Delta P^{(k)} = P(\mathbf{Q}^{(k)}) - P(\mathbf{Q}^{(k-1)})$$
(12)

για δεδομένες αρχικές τιμές των μεταβλητών ελέγχου $Q^{(k)}$, με k = 0, 1. Η πραγματική παράμετρος c_k ελέγχου το πλάτος του όρου feedback, ενώ η $g^{(k)}$ ελέγχει το πλάτος του όρου noise. Ισχύει δε ότι:

$$c_k = \frac{1}{|\Delta P^{(k-1)}|} \tag{13}$$

and

$$g_j^{(k)} = \gamma Q_j^{(k-1)} \mathcal{X}_j^{(k)} , \ j = 1, \cdots, M$$
 (14)



όπου το γ αναφέρεται σε ένα μικρό ποσοστό 1% – 2% των $Q_j^{(k-1)}$, ενώ η $\mathcal{X}_j^{(k)}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα (-0.5, 1).

2.1.5 ALOPEX βελτιστοποίηση με χρήση περιορισμών

Σε κάθε επαναληπτικό βήμα του ALOPEX, μία κατάλληλα επιλεγμένη στρατηγική εφαρμογής κυρώσεων λαμβάνει χώρα, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η καθοδήγηση της όλης διαδικασίας προς την κατεύθυνση όπου μεγιστοποιείται η χρησιμοποιούμενη αντικειμενική συνάρτηση, λαμβάνοντας υπόψη τους σχετικούς φυσικούς περιορισμούς του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε τα παρακάτω:

Σε κάθε επανάληψη του ALOPEX μεταβάλλονται οι τιμές όλων των μεταβλητών ελέγχου Q_i , i = 1, ..., M, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα κυρώσεων ελέγχου 2 φάσεων, με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Και στις δύο φάσεις εφαρμογής των κυρώσεων ελέγχου, οι τιμές εκείνων των Q_i οι οποίες χρειάζονται μεταβολή, μεταβάλλονται κατά ένα ποσοστό, όπου για τη συγκεκριμένη περίπτωση ισούται με 5%. Αυτή είναι μια 5% πολιτική, εφαρμοζόμενη μέσω της παραμέτρου δ = 0.05.
- Στην πρώτη φάση, αρχικά, εάν η παρούσα άντληση $Q_i^{(k)}$ της i^{th} γεώτρησης, προτεινόμενη από τον ALOPEX, παραβιάζει τη μέγιστη ή την ελάχιστη δυνατή τιμή, δηλαδή $Q_i^{(k)} > \overline{Q}_i$ or $Q_i^{(k)} < \underline{Q}_i$, η τιμή της $Q_i^{(k)}$ τροποποιείται ως εξής:

$$Q_i^{(k)} = (1-\delta)\overline{Q}_i \text{ or } Q_i^{(k)} = (1+\delta)\underline{Q}_i$$
(15)

για i = 1, ..., M.

Παραμένοντας στην πρώτη φάση, ορίζουμε τα αθροίσματα

$$S_{i-1}^{(k)} := \sum_{j=1}^{i-1} Q_j^{(k)} + \sum_{j=i}^M Q_j^{(k-1)}$$

$$\tilde{S} := S_{i-1}^{(k)} + \Delta Q_i^{(k)} - \overline{Q}_A$$
(16)

με $S_0^{(k)} = S(Q_1^{(k-1)}, \cdots, Q_M^{(k-1)})$, ενώ ο έλεγχος του συνολικού μεγίστου ακολουθεί. Έτσι, στην περίπτωση αυτή, εάν $\tilde{S} > 0$, η τιμή της $Q_i^{(k)}$ τροποποιείται ως εξής:

$$Q_i^{(k)} = Q_i^{(k)} - (1+\delta)\tilde{S}$$
(17)

$$\mathbf{\gamma}\mathbf{i}\mathbf{\alpha}\ i=1,\ldots,M.$$

 Στη δεύτερη φάση, η εφαρμογή του περιορισμού προσέγγισης επιτυγχάνεται σε δύο κύκλους. Στον πρώτο, μόνο οι τιμές άντλησης των ενεργών



γεωτρήσεων σε κίνδυνο, δηλαδή $x_{\tau,i} > x_i - d_s$, τροποποιούνται, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$Q_i^{(k)} = (1 - \delta)Q_i^{(k)},$$
(18)

για $i = 1, \ldots, M$.

Στον δεύτερο κύκλο, εάν οι τοπικές διορθώσεις αντλήσεων δεν κατάφεραν να περιορίσουν την επέλαση του υφάλμυρου μετώπου, εφαρμόζεται μία γενικευμένη τροποποίηση (βλέπε εξίσωση (18)) στις τιμές των αντλήσεων όλων των γεωτρήσεων.

2.1.6 Κριτήρια Τερματισμού

Με στόχο τη δημιουργία ενός αποτελεσματικού κριτηρίου ολοκλήρωσης της διαδικασίας βελτιστοποίησης, χρησιμοποιούμε έναν συνδυασμό της τυπικής απόκλισης $\sigma_{\hat{k}}$ της αντικειμενικής συνάρτησης στις τελευταίες $\sigma_{\hat{k}}$ επαναλήψεις (στην παρούσα εργασία ορίζεται ότι $\hat{k} = 20$) και της διαφοράς των μέσων τιμών $\mu_{\hat{k}}$ της αντικειμενικής συνάρτησης στο διάστημα των τελευταίων $2\hat{k}$ επαναλήψεων. Ορίζουμε τη χρησιμοποιούμενες μέση τιμή $\mu_{\hat{k}}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\hat{k}}$ ως εξής:

$$\mu_{\hat{k}} = \frac{1}{\hat{k}} \sum_{i=k-\hat{k}}^{k} P(\boldsymbol{Q}^{(i)}) \\ \sigma_{\hat{k}} = \sqrt{\frac{1}{\hat{k}} \sum_{i=k-\hat{k}}^{k} (P(\boldsymbol{Q}^{(i)}) - \mu_{\hat{k}})^2}$$
(19)

όπου k είναι η τρέχουσα επανάληψη, με $k - 2\hat{k} > 0$. Τότε, η πραγματοποίηση του παρακάτω κριτηρίου:

$$(\sigma_{\hat{k}} < \epsilon_1) \land (\mid \mu_{\hat{k}} - \mu_{2\hat{k}} \mid < \epsilon_2)$$
(20)

για θετικές μικρές ανοχές ϵ_1 και ϵ_2 (στην παρούσα εργασία και οι δύο ορίζονται να είναι ίσες με 10^{-2}), θεωρώντας επίσης ότι όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται, τερματίζει τη διαδικασία βελτιστοποίησης.

2.1.7 Αριθμητικές προσομοιώσεις - Αποτελέσματα

Για την πιστοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας βέλτιστης διαχείρισης αντλήσεων, που περιγράφεται στις προηγούμενες παραγράφους, πραγματοποιήθηκε ένα μεγάλος αριθμός προσομοιώσεων που υλοποίησαν ένα μεγάλο φάσμα διαφορετικών τιμών παραμέτρων και κλιματικών συνθηκών. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μίας ενδεικτικής προσομοίωσης για να περιγράψουμε τα τυπικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Ο υπό μελέτη υδροφορέας διαθέτει 5 ενεργές γεωτρήσεις τοποθετημένες στις συντεταγμένες $(x_1, y_1) = (2657, 1572)$, $(x_2, y_2) = (3353, 2200)$, $(x_3, y_3) = (3932, 975)$,



 $(x_4, y_4) = (4632, 2470)$ και $(x_5, y_5) = (4873, 1586)$, τα δε χαρακτηριστικά του περιγράφονται στον Πίνακα 1 που ακολουθεί.

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά υδροφορέα Καλύμνου.

Aquifer characteristics	Well characteristics
L = 7000m	$r_c = 300m$
W = 3000m	$d_s = 100m$
K = 100m/day	$\overline{Q}_A = 15000 m^3/day$
$q = 1.23m^2/day$	$\overline{Q}_j = 2500m^3/day, j = 1, \dots, M$
d = 25m	$\underline{Q}_{i} = 200m^{3}/day, \ j = 1, \dots, M$
N = 30 mm/year	$ec{M}$: number of aquifer wells.

Τα αποτελέσματα ενός τυπικού ελέγχου 500 επαναλήψεων του ALOPEX, καθώς και τα αντίστοιχα αριθμητικά δεδομένα που τις τεκμηριώνουν, συνοψίζονται στα Σχήματα 3-4 και στον πίνακα 2.



Σχήμα 3: Βέλτιστη θέση του μετώπου της υφάλμυρης σφήνας.







Μελετώντας το Σχήμα 4α΄, παρατηρούμε ότι ο ALOPEX οδηγεί την αντικειμενική συνάρτηση P(Q) λαμβάνοντας υπόψη τους σχετικούς περιορισμούς, κοντά στη μέγιστη τιμή της έπειτα από λίγες σχετικά επαναλήψεις. Επιπλέον, παρατηρώντας τις στήλες 3 και 5 του πίνακα 2, είναι σαφές ότι η βέλτιστη συνολική ικανότητα άντλησης S(Q) διαφέρει από τη βέλτιστη τιμή των S(Q) μετά την εφαρμογή του κριτηρίου τερματισμού μόνο σε λίγα κυβικά μέτρα.

ALOPEX	Terminal	Total Optimal	Stopping Criterion	SC Optimal
Performance	Values	Values	(SC) Values	Values
k (# iter.)	500	500	84	63
$P(\boldsymbol{Q}^{(k)})$	0.62769	0.62769	0.62467	0.62753
$Q_1^{(k)}$	202.27	202.27	214.30	206.41
$Q_2^{(k)}$	504.38	504.38	739.03	720.10
$Q_3^{(k)}$	1303.05	1303.05	911.41	923.57
$Q_4^{(k)}$	1047.07	1047.07	1254.90	1278.27
$Q_5^{(k)}$	912.85	912.85	805.97	838.96
$S(\boldsymbol{Q}^{(k)})$	3969.62	3969.62	3925.60	3967.30
Time in secs		7.87	1.32	

Πίνακας 2: Αριθμητικά αποτελέσματα στοχαστικού αλγορίθμου ALOPEX

2.2 Συνδυασμός ALOPEX με πλατφόρμα PTC για δεδομένα πεδίου.

2.2.1 PTC - Princeton Transport Code

Η πλατφόρμα PTC (Princeton Transport Code, βλέπε [6]) είναι ένας τρισδιάστατος προσομοιωτής υπόγειας ροής και μεταφοράς μάζας-ρύπων, που χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων διαφορών, όπου για την περίπτωση ενός ομοιογενούς μη-περιορισμένου υδροφορέα λαμβάνει τη μορφή (βλέπε [10]):

$$\nabla \cdot (Kh\nabla h) + W = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$
(21)

όπου h δηλώνει την υδραυλική κεφαλή, K είναι η υδραυλική αγωγιμότητα, W η ογκομετρική ροή ανά μονάδα όγκου, S_y είναι η ειδική απόδοση και t είναι ο χρόνος.



Το PTC χρησιμοποιεί έναν υβριδικό αλγόριθμο διάσπασης για την επίλυση του πλήρως τρισδιάστατου συστήματος. Κάθε τομέας διακριτοποιείται σε παράλληλες οριζόντιες στρώσεις, σε κάθε μία από τις οποίες η χρήση πεπερασμένων στοιχείων επιτρέπει την ακριβή αναπαράσταση γεωμετρικά ακανόνιστων περιοχών. Για την κατακόρυφη σύνδεση των στρωμάτων χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Αυτή η υβριδική σύζευξη πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων διαφορών, παρέχει την ευκαιρία να χωριστούν οι υπολογισμοί σε δύο στάδια κατά τη διάρκεια ενός δεδομένου χρόνου επανάληψης. Στο πρώτο βήμα, όλες οι οριζόντιες εξισώσεις επιλύονται, ενώ στο δεύτερο βήμα, επιλύονται οι κάθετες εξισώσεις που συνδέουν τις στρώσεις (βλέπε [6]). Αυτό το μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε αρκετές προηγούμενες μελέτες (π.χ. [5], [14], [8]).

Στα πλαίσια της παρούσας ερευνητικής δραστηριότητας, το μοντέλο PTC χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τις προσεγγίσεις sharp interface και Ghyben-Herzberg (που περιγράφησαν αναλυτικά στο κεφάλαιο 2.1), προκειμένου να εκτιμηθεί ο βαθμός διείσδυσης υφάλμυρου νερού στο εσωτερικό του υδροφορέα.

2.2.2 Περιοχή μελέτης και αριθμητική μοντελοποίηση

Η περιοχή μελέτης βρίσκεται στο δήμο Χερσονήσου, ένας υδροφορέας στη βόρεια ακτή του Ελληνικού νησιού της Κρήτης, $25 \ km$ ανατολικά της πόλης του Ηρακλείου. Η λεκάνη της Χερσονήσου καλύπτει μια έκταση περίπου $18 \ km^2$, και εκτείνεται για $3.8 \ km$ σε W - E κατεύθυνση και σχεδόν $4.7 \ km$ σε κατεύθυνση N - S. Κατά τη διάρκεια της θερινής περιόδου η ζήτηση του νερού είναι υψηλή λόγω της εκτεταμένων τουριστικών και γεωργικών δραστηριοτήτων, εντείνοντας το πρόβλημα της υφαλμύρισης. Η περιοχή ενδιαφέροντος περιλαμβάνει πέντε ενεργές γεωτρήσεις που δραστηριοποιούνται όλο το χρόνο, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια της θερινής προκειμένου να καλυφθούν οι ανάγκες άρδευσης και ύδρευσης, εξαιτίας της αύξησης του πληθυσμού της κατά τη διάρκεια της θερινής του αυξημένου τουρισμού.

Η υδρολογική λεκάνη αποτελείται κυρίως από καρστικοποιημένους ασβεστόλιθους μεταβλητής υδραυλικής αγωγιμότητας και μάργες, ενώ κατά μήκος της ακτογραμμής μπορούν να βρεθούν αλλουβιανές αποθέσεις υψηλής διαπερατότητας (βλέπε [19]). Οι τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας που εμφανίζονται στους συγκεκριμένους γεωλογικούς σχηματισμούς παρουσιάζονται αναλυτικά στο Σχήμα 5.

Αρχικά, προσομοιώνουμε τη ροή των υπόγειων υδάτων για το χρονικό διάστημα των 6 μηνών, που αντιπροσωπεύει την εποχή της ξηρασίας, όταν η διείσδυση αλμυρού νερού είναι πιο έντονη. Εν συνεχεία, προσομοιώνουμε τη ροή των υδάτων για ένα νέο εξάμηνο, το οποίο όμως αντιστοιχεί σε χειμερινές συν-





Σχήμα 5: Περιοχές με διαφορετικές τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας.

θήκες ανατροφοδότησης του υδροφορέα, με αυξημένη εισροή γλυκού νερού στη λεκάνη. Μια Dirichlet οριακή συνθήκη σταθερής κεφαλής ίση με 100 m εφαρμόστηκε κατά μήκος της ακτής για να προσομοιώσει το όριο στη θάλασσα, ενώ διάφορες συνθήκες Neumann εφαρμόζονται στο νότιο όριο της περιοχής κατά τη διάρκεια της διαδικασίας βαθμονόμησης, προκειμένου να προσομοιαστεί η πλαϊνή εισροή υπόγειων υδάτων με τις μετρούμενες τιμές υδραυλικής κεφαλής στις γεωτρήσεις (βλέπε Σχήμα 6). Σχετικά με θέση του μετώπου της υφάλμυρης



Σχήμα 6: Περιφερειακή ανατροφοδότηση του υδροφορέα και πλέγμα διακριτοποίησης αποτελούμενο από 1984 στοιχεία και 1050 κόμβους, τους οποίους ο κώδικας PTC χρησιμοποιεί για να υπολογίζει τις τιμές της υδραυλικής κεφαλής στο εσωτερικό του υδροφορέα.

σφήνας, σύμφωνα με σχέση των Ghyben-Herzberg, η τιμή της υδραυλικής κεφαλής εκτιμάται στα $h_f = 2.5 m$, δεδομένου ότι το βάθος του υπό μελέτη υδροφορέα



ισούται με 100m. Επομένως, οι ισοϋψείς των 100+2.5 = 102.5 m αντιπροσωπεύουν το όριο της υδραυλικής κεφαλής πέραν από το οποίο, η περιοχή θεωρείται ότι έχει υποστεί το φαινόμενο της υφαλμύρισης.

2.2.3 Διαδικασία βελτιστοποίησης διαχείρισης αντλήσεων

Ως *M* ορίζουμε να είναι το πλήθος των ενεργών γεωτρήσεων στην τοπική περιοχή, ενώ το διάνυσμα *Q* ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{Q} = (Q_1, \dots, Q_M) \tag{22}$$

όπου Q_i , δηλώνει τον ρυθμό άντλησης της i^{th} ενεργούς γεωτρήσεως με συντεταγμένες (x_i, y_i) , για $i = 1, \ldots, M$. Ο αντικειμενικός μας στόχος, δηλαδή η μεγιστοποίηση των αντλήσεων γλυκού νερού, αποφεύγοντας παράλληλα τη μετακίνηση και είσοδο του υφάλμυρου μετώπου στο εσωτερικό μια περιοχής ασφάλειας γύρω από κάθε γεώτρηση, μπορεί να παρουσιαστεί μέσω του παρακάτω μη-γραμμικού προβλήματος βελτιστοποίησης (βλέπε [25]):

max:
$$P \equiv P(\boldsymbol{Q}) = e^{-\left[S(\overline{\boldsymbol{Q}}) - S(\boldsymbol{Q})\right]^2 / S^2(\overline{\boldsymbol{Q}})} \in [0, 1]$$

s.t.:
$$0 \leq \underline{Q_i} \leq Q_i \leq \overline{Q_i} < Q_A$$
$$S(\boldsymbol{Q}) = \sum_{i=1}^M Q_i \leq Q_A$$
$$x_{\tau,i} \leq x_i - d_s, \ i = 1, \dots, M$$
(23)

όπου P δηλώνει την αντικειμενική συνάρτηση, $\underline{Q_i}$ και $\overline{Q_i}$ είναι οι ελάχιστες και μέγιστες δυνατότητες αντλήσεως, αντίστοιχα, της i^{th} γεωτρήσεως, Q_A είναι η συνολική δυνατότητα αντλήσεως από ολόκληρο τον υδροφορέα, $x_{\tau,i}$ είναι η x-συντεταγμένη του υφάλμυρου μετώπου απέναντι από την i^{th} γεώτρηση και d_s μια προκαθορισμένη απόσταση ασφάλειας.

2.2.4 Στρατηγικές ασφάλειας

Ο ρόλος της παραμέτρου d_s , που χρησιμοποιείται στις εξισώσεις (23), είναι κεντρικός στη δημιουργία μιας στρατηγικής ασφάλειας για την προστασία του υδροφορέα. Στην εργασία αυτή, η παράμετρος d_s θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει την μέση ακτίνα του πολυγωνικού τομέα προστασίας γύρω από κάθε ενεργή γεώτρηση. Αυτή η περιοχή αποτελείται από έναν αριθμό κόμβων προστασίας, γύρω από τα ενεργά σημεία άντλησης (βλέπε Σχήμα 7). Στην παρούσα εφαρμογή μας, ο αποφασιστικός παράγοντας για τον καθορισμό της τιμής της d_s είναι η απαίτησή μας, να παραμένει το μέτωπο της υφάλμυρης σφήνας εκτός της περιοχής ασφάλειας γύρω από κάθε γεώτρηση, χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων που προτείνει ο ALOPEX αλλά και τιμές αντλήσεων τεχνητά



προσαυξημένες κατά 10%. Η απαίτηση αυτή μας οδήγησε άμεσα στον καθορισμό της τιμής αυτής της παραμέτρου μέσω ενός πλήθους προσομοιώσεων, ως $d_s = 180 m$. Να επισημάνουμε ότι η συγκεκριμένη τιμή, αν και στην παρούσα εφαρμογή μας διατηρείται ομοιόμορφη για όλες τις ενεργές γεωτρήσεις, μπορεί να οριστεί διαφορετικά για κάθε μία από αυτές, ανάλογα με την τοπική στρατηγική προστασίας που ακολουθούμε.



Σχήμα 7: Κόμβοι προστασίας (σε κόκκινους κύκλους) γύρω από κάθε ενεργή γεώτρηση, τοποθετημένοι σε μια μέση απόσταση των $d_s = 180 m$. Ορίζεται έτσι μια πολυγωνική περιοχή ασφάλειας, όπου μέσω της εφαρμογής των κυρώσεων ελέγχου του ALOPEX, επιτυγχάνεται ο έλεγχος κίνησης του μετώπου της υφάλ-μυρης σφήνας στο εσωτερικό του υδροφορέα.

2.2.5 ALOPEX βελτιστοποίηση με χρήση περιορισμών

Ο αλγόριθμος στοχαστικής βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούμε, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, είναι η έκδοση ALOPEX V, με εξίσωση:

$$\boldsymbol{Q}^{(k)} = \boldsymbol{Q}^{(k-1)} + c_k \Delta P^{(k-1)} \Delta \boldsymbol{Q}^{(k-1)} + \boldsymbol{g}^{(k)} , \quad k = 2, 3, \dots$$
 (24)

όπου

$$\Delta Q^{(k)} = Q^{(k)} - Q^{(k-1)}$$

$$\Delta P^{(k)} = P(Q^{(k)}) - P(Q^{(k-1)})$$
(25)

για δεδομένες αρχικές τιμές των μεταβλητών ελέγχου $Q^{(k)}$, με k = 0, 1. Η πραγματική παράμετρος c_k ελέγχου το πλάτος του όρου feedback, ενώ η $g^{(k)}$ ελέγχει το πλάτος του όρου noise. Ισχύει δε ότι:

$$c_k = \frac{1}{|\Delta P^{(k-1)}|} \tag{26}$$



and

$$g_j^{(k)} = \gamma Q_j^{(k-1)} \mathcal{X}_j^{(k)}, \quad j = 1, \cdots, M$$
 (27)

όπου το γ αναφέρεται σε ένα μικρό ποσοστό 1% – 2% των $Q_j^{(k-1)}$, ενώ η $\mathcal{X}_j^{(k)}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα (-0.5, 1).

Σε κάθε επανάληψη του ALOPEX μεταβάλλονται οι τιμές όλων των μεταβλητών ελέγχου Q_i , i = 1, ..., M, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα κυρώσεων ελέγχου 2 φάσεων. Η πρώτη φάση επικεντρώνεται στην εφαρμογή δύο περιορισμών που περιγράφονται στις εξισώσεις (23), οι οποίοι προηγούνται της εφαρμογής του κώδικα PTC, ενώ στην δεύτερη φάση γίνεται η εφαρμογή του τρίτου περιορισμού, ο οποίος ακολουθεί την εφαρμογή του PTC. Για την αναλυτική περιγραφή του χρησιμοποιούμενου συστήματος κυρώσεων ελέγχου, παραπέμπουμε στο προηγούμενο κεφάλαιο 2.1.4.

Στο Σχήμα 8 που ακολουθεί, η μεθοδολογία βελτιστοποίησης αντλήσεων ALOPEX/PTC όπως αυτή περιγράφηκε ως τώρα, παρουσιάζεται μέσω του παρακάτω διαγράμματος ροής.

2.2.6 Αριθμητικές προσομειώσεις

Οι προσομοιώσεις που ακολουθούν παρουσιάζουν τη συμπεριφορά του συνδυαστικού αλγορίθμου ALOPEX/PTC σε ένα καλοκαιρινό σενάριο άντλησηςανατροφοδότησης, όπου N = 0 mm/year, ενώ η πλαϊνή ανατροφοδότηση του υδροφορέα χαρακτηρίζεται από Neumann συνοριακές συνθήκες, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.

Στον υδροφορέα αυτό εμφανίζονται 5 ενεργές γεωτρήσεις, οι συντεταγμένες των οποίων (βλέπε Σχήμα 6) έχουν ορισθεί βάσει ενός γεωγραφικού συστήματος συντεταγμένων. Από τις 5 αυτές γεωτρήσεις, η γεώτρηση Νο 1 βρίσκεται τοποθετημένη πολύ κοντά στη θαλάσσια ακτογραμμή, με συνέπεια να είναι διαρκώς υφαλμυρισμένη, ανεξάρτητα με το αν είναι ή όχι ενεργή. Το νερό που εξάγεται από τη γεώτρηση αυτή είναι πάντοτε ακατάλληλο για ύδρευση ή άρδευση της τοπικής κοινότητας. Εντός του αλγορίθμου ALOPEX/PTC, μελετάμε τις τιμές αντλήσεων που η γεώτρηση αυτή μπορεί να αποδώσει, αλλά λαμβάνοντας υπόψη την ιδιαίτερα κακή τοποθέτησή της κοντά στη θάλασσα, δεν τη χρησιμοποιούμε στο συνολικό πλάνο βέλτιστων αντλήσεων που κατασκευάζουμε για τον υδροφορέα αυτό.

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζουμε τις μέγιστες \overline{Q}_i και ελάχιστες δυνατότητες αντλήσεων για όλες τις ενεργές γεωτρήσεις του υδροφορέα υπό μελέτη, με την ιδιότητα οι ελάχιστες να ικανοποιούν τη σχέση: $Q_i = 0.3 * \overline{Q}_i$ για $i \in \{1, ..., 5\}$.





Σχήμα 8: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας βελτιστοποίησης ALOPEX/PTC.

Πίνακας 3: Δυνατότητες άντλησης (m^3/day) των θέσεων ενεργών γεωτρήσεων

i	1	2	3	4	5
\overline{Q}_i	1800.00	2520.00	576.00	2520.00	146.00
\underline{Q}_i	540.00	756.00	172.80	756.00	43.80

Προφίλ DRY_5: Καλοκαιρινό σενάριο 5 ενεργών γεωτρήσεων Το προφίλ Dry_5 αντιστοιχεί σε ένα ξηρό, καλοκαιρινό σενάριο (N = 0 mm/year) σενάριο, όπου η γεώτρηση No 1 είναι ενεργή αλλά αντλεί μονάχα υφάλμυρο νερό.

Όλα τα αποτελέσματα από την ALOPEX/PTC διαδικασία στοχαστικής βελτιστοποίησης κατά τη διάρκεια ενός τυπικού κύκλου 500 επαναλήψεων, συνοψίζονται στον Πίνακα 4 (όπου t_k είναι το υπολογιστικό κόστος σε χρόνο του αλγορίθμου μέχρι την kth επανάληψη, σε δευτερόλεπτα) καθώς και στο Σχήμα 9.



Problem	Total Optimal	Stopping Criterion
Parameters	Values	Optimal Values
k (# iter.)	404	79
$P(\boldsymbol{Q}^{(k)})$	0.9756	0.97153
$Q_1^{(k)}$	1787.02	1735.11
$Q_2^{(k)}$	1368.66	1340.61
$Q_3^{(k)}$	560.20	561.66
$Q_4^{(k)}$	2519.43	2515.91
$Q_5^{(k)}$	138.09	123.45
$S(\boldsymbol{Q}^{(k)})$	6373.40	6276.74
t_k	378.5125	74.0161

Πίνακας 4: Αλγόριθμος ALOPEX/PTC: Προφίλ DRY_5

Παρατηρώντας το Σχήμα 9α΄ εύκολα διαπιστώνει κάποιος ότι οι θέσεις των γεωτρήσεων, εκτός φυσικά από τη θέση No 1, παραμένουν ασφαλείς από την διείσδυση υφάλμυρου νερού, δεδομένου ότι το υφάλμυρο μέτωπο (ισοϋψής γραμμή των h = 102.5 m) κρατήθηκε σε απόσταση τουλάχιστον $d_s = 180 m$ μακριά από όλες τις προστατευόμενες περιοχές που δραστηριοποιούνται. Είναι επίσης σημαντικό ότι, όπως το Σχήμα 9β΄ υποδηλώνει, ότι προσαυξήσεις 10% για όλους τους βέλτιστους ρυθμούς άντλησης Q_i που αναφέρονται στον Πίνακα 4, δεν αποτελούν απειλή για την ακεραιότητα των προστατευόμενων ενεργών περιοχών άντλησης, λόγω της κατάλληλα επιλεγμένης τιμής της απόστασης ασφαλείας d_s , όπως αυτή περιγράφηκε προηγουμένως στο κεφάλαιο 2.2.4. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος ALOPEX οδηγεί την αντικειμενική συνάρτηση (βλέπε Σχήμα 9γ΄) σε μία γειτονιά βέλτιστων, υπό περιορισμούς, λύσεων έπειτα από σχεδόν 80 επαναλήψεις και παραμένει κοντά σε αυτήν, για το υπόλοιπο της διαδικασίας, μέσα σε σχετικά μικρές διακυμάνσεις πλάτους. Παρόμοια συμπεριφορά μπορεί να παρατηρηθεί στο Σχήμα 9δ΄, για τις μεταβλητές ελέγχου Q_i της διαδικασίας.

Ο συνολικός χρόνος λειτουργίας της διαδικασίας βελτιστοποίησης ισούται με $t_{500} = 468.4561 \ secs$, με μέσο χρόνο ανά επανάληψη ίσο με $0.9369 \ secs$. Επισημαίνουμε ότι το έντονο υπολογιστικά μέρος της διαδικασίας αυτής είναι η εκτέλεση της μονάδας PTC. Ως εκ τούτου, το συνολικό υπολογιστικό κόστος εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό των εκτελέσεων PTC, η οποία συνδέεται στενά με το πλήθος των διορθώσεων που το σύστημα ελέγχου κυρώσεων αναγκάζεται να πραγματοποιήσει στις τρέχουσες προτεινόμενες τιμές αντλήσεων.

Να συμπληρώσουμε στο σημείο αυτό ότι στις εργασίες μας [23] και [24] γίνεται αναλυτική περιγραφή τριών ακόμη σεναρίων ανατροφοδότησης του συγκεκριμένου υδροφορέα.





(α΄) Τιμές υδραυλικής κεφαλής χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων.



(γ΄) Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης $P(\pmb{Q}^{(k)})$ κατά τη διάρκεια των $k=500~{\rm emava}$ λήψεων.



(β΄) Τιμές υδραυλικής κεφαλής χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων προσαυξημένες κατά 10%.



(δ΄) Τιμές αντλήσεων Q_i κατά τη διάρκεια των k = 500 επαναλήψεων.

Σχήμα 9: Προφίλ DRY_5: Συμπεριφορά του αλγορίθμου ALOPEX/PTC για το Dry σενάριο με 5 ενεργές γεωτρήσεις, σε ένα τυπικό κύκλο 500 επαναλήψεων.

2.2.7 Αποτελέσματα ALOPEX/PTC διαχείρισης υδροφορέα Χερσονήσου

Ο συνδυαστικός στοχαστικός αλγόριθμος ALOPEX/PTC στην περίπτωση του υδροφορέα της Χερσονήσου υπήρξε ιδιαίτερα αποτελεσματικός, αφού αφενός μεγιστοποίησε τις αντλήσεις γλυκού νερού από τις υπάρχουσες γεωτρήσεις, αφετέρου οι γεωτρήσεις αυτές παρέμειναν ασφαλείς από το φαινόμενο της υφαλμύρισης. Η προστασία τους επιτυγχάνεται μέσω της χρήσεως κατάλληλων περιορισμών ενσωματωμένων στον αλγόριθμο ALOPEX, οι οποίοι επεμβαίνοντας στις προτεινόμενες από τον αλγόριθμο αντλήσεις, περιορίζουν τη μετακίνηση του υφάλμυρου μετώπου στο εσωτερικό του υδροφορέα, σε περιοχές εκτός των περιοχών ασφάλειας που ορίσαμε γύρω από κάθε γεώτρηση. Με τη διαδικα-



σία αυτή κατέστη δυνατή η αξιοποίηση μεγαλύτερων ποσοτήτων γλυκού νερού από τις υπάρχουσες γεωτρήσεις, σε σχέση με δεδομένα αντλήσεων γνωστά στη βιβλιογραφία.

2.3 Συνδυασμός ALOPEX με πλατφόρμα FEniCS για δεδομένα πεδίου.

Σε αυτή την ερευνητική δραστηριότητα έγινε μελέτη της επίλυσης προβλημάτων υφαλμύρισης υδροφορέων με τη χρήση λογισμικών ανοικτού κώδικα FEniCS ([29], [30]). Η πλατφόρμα αυτή υλοποιεί αριθμητικές μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων υψηλής ακρίβειας για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Πιο συγκεκριμένα έγινε επίλυση των προβλημάτων που μοντελοποιούν την υφαλμύριση των υδροφορέων της περιοχών Καλύμνου και Χερσονήσου Κρήτης. Η γεωμετρία του πρώτου υδροφορέα επιτρέπει τη διακριτοποίηση μέσω ομοιόμορφα δομημένου πλέγματος, ενώ αυτή του δεύτερου τη χρήση μη δομημένων πλεγμάτων στη κατασκευή των πεπερασμένων στοιχείων της αριθμητικής μεθόδου.

2.3.1 Υδροφορέας Καλύμνου

Όπως έχει αναφερθεί ο υδροφορέας της Καλύμνου μπορεί να προσομοιωθεί με μια ορθογώνια περιοχή 7 επί 3 χιλιομέτρων. Στη διαφορική εξίσωση, η επίλυση της οποίας θα προσδιορίσει το δυναμικό ροής, σε αυτή τη περίπτωση θα έχει συνοριακές συνθήκες Dirichlet μηδέν στην αριστερή πλευρά του χωρίου όπου υπάρχει η θάλασσα. Στις υπόλοιπες πλευρές οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Neumann με τις δυο μεγάλες πλευρές του να έχουν τιμή ίση με μηδέν, ενώ η άλλη τιμή ίση με 1.23 λόγω του ορεινού όγκου που υπάρχει εκεί και την τροφοδότηση του υδροφορέα με γλυκό νερό από τα βουνά. Ως προς τη βροχόπτωση έγινε ομοιόμορφη κατανομή κατανομή ύψους 3 εκατοστών σε ετήσια βάση σε ολόκληρη τη περιοχή του υδροφορέα.

Η μελέτη του προβλήματος υφαλμύρισης περιλαμβάνει δυο είδη προσεγγίσεων. Το πρόβλημα που αντιστοιχεί στη πρώτη προσέγγιση του ζητήματος περιλαμβάνει την υπόθεση της ύπαρξης ομοιόμορφης υδραυλικής αγωγιμότητας K = 100 σε όλη την έκταση του υδροφορέα.

Η δεύτερη προσέγγιση του προβλήματος περιλαμβάνει τη χρήση τεσσάρων περιοχών με διαφορετικές τιμές υδραυλικής αγωγιμότητας εδάφους, η οποία ποικίλει μεταξύ των τιμών 25, 35, 50 και 75. Το Σχήμα 10 εμφανίζει τον υδροφορέα σύμφωνα με τις δυο διαφορετικές προσεγγίσεις καθώς και το μέτωπο της φυσικής υφαλμύρισης για τη περίπτωση μηδενικών αντλήσεων από τα πέντε πηγάδια της περιοχής του υδροφορέα. Οι γαλάζιοι κύκλοι περιμετρικά των





Σχήμα 10: Υδροφορέας προβλήματος Καλύμνου με διαφορετικές προσεγγίσεις ως προς τις υδραυλικές αγωγιμότητες του εδάφους.

πηγαδιών καθορίζουν την απαγορευμένη ζώνη εισόδου του μετώπου της θάλασσας, ενώ τα κόκκινα σημεία στις περιφέρειες τους είναι τα σημεία ελέγχου (guard points). Η ζώνη αυτή έχει προσδιοριστεί στη κυκλική περιοχή κάθε πηγαδιού με κέντρο το σημείο του και ακτίνα ίση με 400 μέτρα.

Η διακριτοποίηση του υδροφορέα έγινε χρήση ορθογώνιων τριγώνων, αφού η γεωμετρία του υδροφορέα το επέτρεπε. Έτσι η αριθμητική μέθοδος επίλυσης βασίστηκε σε ομοιόμορφα τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία για όλο τον υδροφορέα.

Ως προς τη μέθοδο βελτιστοποίησης των αντλήσεων εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος της μεθόδου ALOPEX με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά της υλοποίησης του προβλήματος στην πλατφόρμα λογισμικού PTC.

2.3.2 Υδροφορέας Χερσονήσου Κρήτης

Η γεωμετρία του συγκεκριμένου προβλήματος, όπως έχει ήδη περιγραφεί, εισήχθη επιτυχώς ψηφιακά στη πλατφόρμα λογισμικού FEniCS. Στο Σχήμα 11 εμφανίζονται οι περιοχές με διαφορετική υδραυλική αγωγιμότητα που απαρτίζουν το γεωλογικό χάρτη του υδροφορέα καθώς και η διακριτοποίηση τους.



Σχήμα 11: Διακριτοποίηση υδροφορέα προβλήματος δοκιμής Χερσονήσου.



Στη μελέτη επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος στην πλατφόρμα λογισμικού FEniCS χρησιμοποιήθηκαν κατάλληλες τιμές στις συνοριακές συνθήκες, καθώς και κατάλληλη κανονικοποίηση της ΜΔΕ, ώστε η τρέχουσα δισδιάστατη γεωμετρία που εισήχθη στο FEniCS να παράγει παραπλήσια αποτελέσματα με αυτά που παρήχθησαν από την τρισδιάστατη γεωμετρία που εισήχθη στο PTC. Τονίζουμε πάντως ότι βρίσκεται υπό μελέτη η τελική προσέγγιση του τρισδιάστατου μοντέλου από δισδιάστατες προσεγγίσεις που πιθανόν να οδηγήσει σε αναθεώρηση των τιμών που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Όπως είναι γνωστό σε αυτόν τον υδροφορέα το μέτωπο υφαλμύρισης εμφανίζεται για τιμή δυναμικού ροής ίση με 128.125, άρα στον προσδιορισμό της θέσης του μετώπου θα πρέπει να αναζητηθούν πεπερασμένα τριγωνικά στοιχεία των οποίων οι τιμές του δυναμικού ροής στις κορυφές βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής της τιμής. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο συγκεκριμένος υδροφορέας έχει έκταση περίπου 18 τετραγωνικά χιλιόμετρα, τότε καταλαβαίνουμε ότι τα πεπερασμένα στοιχεία του μη δομημένου πλέγματος διακριτοποίησης του θα έχουν ακμές μερικές δεκάδες ή καλύτερα εκατοντάδες μέτρα. Έτσι ο προσδιορισμός της θέσης του μετώπου θα γίνεται με απόκλιση αρκετών εκατοντάδων μέτρων από την πραγματική του θέση αν χρησιμοποιηθούν μόνο οι κορυφές των στοιχείων για αυτό το σκοπό. Αυτό δημιουργεί σημαντικές αποκλίσεις στην εύρεση των βέλτιστων τιμών αντλήσεων των πηγαδιών, διότι η θέση του μετώπου είναι καθοριστική για την αποδοχή ή όχι των δοκιμαστικών τιμών αντλήσεων από τη διαδικασία βελτιστοποίησης τους. Οπότε χρειάζεται ακριβέστερος προσδιορισμός της θέσης του μετώπου στο εσωτερικό των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χρήση της γραμμικής παρεμβολής μεταξύ των σημείων των δυο πλευρών του πεπερασμένου στοιχείου με τιμή δυναμικού ροής ίση με 128.125. Έτσι θα κατασκευάζεται το τμήμα του μετώπου με μεγαλύτερη ακρίβεια μέσα σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο στο εσωτερικό του οποίου διέρχεται το μέτωπο υφαλμύρισης. Η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

2.3.3 Αλγόριθμος σχεδίασης μετώπου υφαλμύρισης

Βήμα 1: Εύρεση του πεπερασμένου στοιχείου e_i για i = 1 από τα στοιχεία του εξωτερικού συνόρου το οποίο διαπερνά το μέτωπο

Βήμα 2: Υπολογισμός σημείων πλευρών του e_i από τα οποία διέρχεται το μέτωπο και σχεδιασμός του με γραμμική παρεμβολή

<u>Βήμα 3:</u> Αν το πεπερασμένο στοιχείο e_i δεν είναι στοιχείο εξωτερικού συνόρου εύρεση του πεπερασμένου στοιχείου e_{i+1} από τα γειτονικά στοιχεία του e_i το οποίο διαπερνά το μέτωπο, διαφορετικά εκτέλεση βήματος 5.

Βήμα 4: Για i = i + 1 εκτέλεση βήματος 2

Βήμα 5: Ολοκλήρωση προσδιορισμού μετώπου



Το πρόβλημα μοντελοποίησης της υφαλμύρισης του υδροφορέα Καλύμνου, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, επιλύθηκε αριθμητικά στη πλατφόρμα λογισμικού FEniCS. Η λύση που παράχθηκε και εμφανίζεται στο Σχήμα 12, αναφέρεται στο δυναμικό ροής κατά τη περίπτωση της φυσικής υφαλμύρισης του υδροφορέα. Το αριστερό γράφημα περιλαμβάνει τη περίπτωση ομοιόμορφης αγωγιμότητας εδάφους, ενώ το δεξί αυτή με τις κυμαινόμενες τιμές σε υποπεριοχές.



Σχήμα 12: Δυναμικό ροής φυσικής υφαλμύρισης προβλήματος Καλύμνου με διαφορετικές προσεγγίσεις ως προς τις υδραυλικές αγωγιμότητες του εδάφους.

Η χρήση δομημένου πλέγματος διακριτοποίησης επιτρέπει τον υπολογισμό της τάξης σύγκλισης της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Επειδή τα πολυώνυμα βάσης που έχουν επιλεγεί είναι γραμμικά, αναμένεται η τάξη σύγκλισης να είναι τετραγωνική. Γιαυτό το σκοπό υπολογίστηκε η *L*₂ νόρμα του σφάλματος μεταξύ διαφόρων διακριτοποιήσεων, οι οποίες σε κάθε εναλλαγή πλέγματος θα διαθέτουν πεπερασμένα στοιχεία διπλάσιου μήκους κάθετων πλευρών κάθε φορά. Η πιο πυκνή διαμέριση είναι αυτή κατά την οποία το μήκος των κάθετων πλευρών των στοιχείων είναι ίση με 6.25 μέτρα. Το σφάλμα κάθε προσεγγιστικής επίλυσης σε κάθε πλέγμα υπολογίστηκε ως προς τη λύση αυτής της διακριτοποίησης. Έτσι επιλύθηκαν προβλήματα με μήκος κάθετων πλευρών των στοιχείων 12.5, 25, 50 και 100 μέτρα για προβλήματα με ενιαία τιμή υδραυλικής αγωγιμότητας και διαφορετικής για κάθε υποχωρίο του υδροφορέα. Στους πίνακες που ακολουθούν εμφανίζονται οι τιμές του σφάλματος και της τάξης σύγκλισης της αριθμητικής μεθόδου για τις περιπτώσεις ομοιόμορφης (δεξιά) υδραυλικής αγωγιμότητας.

h	$ E_h _2$	Order of conv.	h	$ E_h _2$	Order of conv.
100	6.29e-1	-	100	2.56	-
50	1.66e-1	1.92	50	8.55e-1	1.58
25	4.71e-2	1.82	25	3.15e-1	1.44
12.5	9.75e-3	2.27	12.5	9.48e-2	1.73



Στο Σχήμα 13 εμφανίζονται τα γραφήματα σφάλματος σε ολόκληρη τη περιοχή του υδροφορέα μεταξύ διακριτοποιήσεων 100 και 6.25 μέτρων. Το αριστερό γράφημα αναφέρεται στη περίπτωση της ομοιόμορφης τιμής υδραυλικής αγωγιμότητας, ενώ το δεξί στη περίπτωση πολλαπλών τιμών υδραυλικής αγωγιμότητας. Όπως παρατηρούμε οι μέγιστες τιμές σφαλμάτων ανήκουν σε κόμβους πλέγματος οι οποίοι βρίσκονται κοντά στα πηγάδια.



Σχήμα 13: Σφάλμα προβλήματος Καλύμνου με διαφορετικές προσεγγίσεις ως προς τις υδραυλικές αγωγιμότητες του εδάφους.

Στη συνέχεια έγινε επίλυση των προβλημάτων με τις δυο προσεγγίσεις κάνοντας χρήση πεπερασμένων στοιχείων μήκους κάθετων πλευρών ίσες με 100 μέτρα.

Στην περίπτωση ομοιόμορφης υδραυλικής αγωγιμότητας του υδροφορέα τα αποτελέσματα συνοψίζονται στα Σχήματα 17-21. Πιο συγκεκριμένα, η βέλτιστη θέση του μετώπου, που απεικονίζεται στο Σχήμα 14, προέκυψε στο βήμα 28 της διαδικασίας βελτιστοποίησης και αντιστοιχεί σε συνολική άντληση 3945 m^3/day ,





ενώ το δυναμικό ροής που αντιστοιχεί στις βέλτιστες τιμές αντλήσεων επιδεικνύεται στο Σχήμα 15. Επισημαίνουμε ότι οι ανωτέρω βέλτιστες τιμές είναι απολύτως συμβατές με τι αντίστοιχες τιμές του αναλυτικού μοντέλου.





Σχήμα 15: Δυναμικό ροής υδροφορέα για τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων.

Η συμπεριφορά του αλγορίθμου στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX απεικονίζεται στα Σχήματα 16 και 17.



Σχήμα 16: Διακύμανση της αντικειμενικής συνάρτησης (αριστερά) και των όρων noise και feedback (δεξιά) καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.



Σχήμα 17: Διακύμανση αντλήσεων ανά πηγάδι καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.



Στην περίπτωση μη ομοιόμορφης υδραυλικής αγωγιμότητας του υδροφορέα τα αποτελέσματα συνοψίζονται στα Σχήματα 18-21. Πιο συγκεκριμένα, η βέλτιστη θέση του μετώπου, που απεικονίζεται στο Σχήμα 18, προέκυψε στο βήμα 15 της διαδικασίας βελτιστοποίησης και αντιστοιχεί σε συνολική άντληση 4412 m^3/day , ενώ το δυναμικό ροής που αντιστοιχεί στις βέλτιστες τιμές αντλήσεων επιδεικνύεται στο Σχήμα 19.



Σχήμα 18: Μέτωπο υφαλμύρισης υδροφορέα για τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων.



Σχήμα 19: Δυναμικό ροής υδροφορέα για τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων.



Σχήμα 20: Διακύμανση της αντικειμενικής συνάρτησης (αριστερά) και των όρων noise και feedback (δεξιά) καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.



Η συμπεριφορά του αλγορίθμου στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX απεικονίζεται στα Σχήματα 20 και 21.



Σχήμα 21: Διακύμανση αντλήσεων ανά πηγάδι καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.

2.3.5 Αποτελέσματα ALOPEX/FEniCS διαχείρισης υδροφορέα Χερσονήσου Κρήτης

Υπενθυμίζουμε ότι στη μελέτη επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος στην πλατφόρμα λογισμικού FEniCS χρησιμοποιήθηκαν κατάλληλες τιμές στις συνοριακές συνθήκες, καθώς και κατάλληλη κανονικοποίηση της MΔE, ώστε η τρέχουσα δισδιάστατη γεωμετρία που εισήχθη στο FEniCS να παράγει παραπλήσια αποτελέσματα με αυτά που παρήχθησαν από την τρισδιάστατη γεωμετρία που εισήχθη στο PTC. Επιπλέον θεωρήθηκε ότι ο υδροφορέας τροφοδοτείται με γλυκό νερό μόνο από τις υπόγειες περιοχές και όχι από την επιφάνεια μέσω βροχοπτώσεων. Η αρίθμηση των τεσσάρων πηγαδιών είναι από τη θάλασσα ή το βορά προς το νότο. Στα δυο πρώτα πηγάδια και προς τη πλευρά της θάλασσας έχουν τοποθετηθεί τέσσερα σημεία ελέγχου του μετώπου υφαλμύρισης σε απόσταση περίπου 180 μέτρων από το ανάλογο πηγάδι.

Τα αποτελέσματα της βέλτιστης διαχείρισης από την συνδυαστική εφαρμογή των ALOPEX/FEniCS συνοψίζονται στα Σχήματα 22-25. Πιο συγκεκριμένα, η βέλτιστη θέση του μετώπου, που απεικονίζεται στο Σχήμα 22, προέκυψε στο βήμα 66 της διαδικασίας βελτιστοποίησης και αντιστοιχεί σε συνολική άντληση 4868 m^3/day , ενώ το δυναμικό ροής που αντιστοιχεί στις βέλτιστες τιμές αντλήσεων επιδεικνύεται στο Σχήμα 23. Οι βέλτιστες αντλήσεις κάθε γεώτρησης είναι 1481, 752, 2509 και 126 m^3/day και συγκρίνονται επιτυχώς με τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές (1368, 560, 2519 και 138 m^3/day) που είχαν ληφθεί από την συνδυαστική εφαρμογή των ALOPEX/PTC.

Τέλος, η συμπεριφορά του αλγορίθμου στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX απεικονίζεται στα Σχήματα 24 και 25.





Σχήμα 22: Μέτωπο υφαλμύρισης υδροφορέα για τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων.



Σχήμα 23: Δυναμικό ροής υδροφορέα για τις βέλτιστες τιμές αντλήσεων.



Σχήμα 24: Διακύμανση της αντικειμενικής συνάρτησης (αριστερά) και των όρων noise και feedback (δεξιά) καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.





Σχήμα 25: Διακύμανση αντλήσεων ανά πηγάδι καθ' όλη τη βελτιστοποίηση.

2.4 Αποτελέσματα ALOPEX/Collocation διαχείρισης υδροφορέα Καλύμνου

2.4.1 Hermite Collocation

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε επιγραμματικά, για λόγους πληρότητας, τον σχετικό συμβολισμό της μεθόδου Collocation και υπενθυμίζουμε ότι η ανάπτυξη της μεθόδου παρατίθεται με λεπτομέρεια στην Τεχνικές Εκθέσεις της Δράσης 2.1. Σημειώνουμε ότι στην παρούσα ενότητα μελετάμε το steady state πρόβλημα που σχετίζεται με τον ομογενή ορθογώνιος υδροφορέα ο οποίος προσεγγίζει τον υδροφορέα στο Βαθύ Καλύμνου.

Θεωρώντας μία ομοιόμορφη διαμέριση $N_x \times N_y$ τετραγωνικών χωρίων μήκους h, η HC μέθοδος αναζητά προσεγγιστικές λύσεις $u(x,y) \sim \phi(x,y)$ της μορφής:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{2N_x+2} \sum_{j=1}^{2N_y+2} \alpha_{ij} \Phi_{ij}(x,y)$$
(28)

όπου $\Phi_{ij}(x,y) = \Phi_i(x)\Phi_j(y)$ είναι τα bicubic hermite πολυώνυμα, με κέντρο στον κόμβο (x_i, y_j) .

Για τον υπολογισμό των αγνώστων συντελεστών $\alpha_{ij} \equiv \alpha_{ij}(t)$, $i = 1, ..., N_x + 1$ και $j = 1, ..., N_y + 1$ η μέθοδος Collocation παράγει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όπου η προσεγγιστική λύση u(x, t) απαιτούμε να μηδενίζεται στα $(2N_x + 2) \times (2N_y + 2)$ εσωτερικά και συνοριακά collocation points. Τα απαιτούμενα εσωτερικά collocation points, γνωστά ως Gauss Points, που προκύπτουν ως ρίζες του πολυωνύμου Legendre σε κάθε element $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, δίνονται ως εξής:



$$\sigma_{2i-1}^{x} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad , \quad \sigma_{2i}^{x} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}$$
$$\sigma_{2j-1}^{y} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad , \quad \sigma_{2j}^{y} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε element έχει 16 βαθμούς ελευθερίας και υποθέτοντας ότι το *K* είναι βαθμωτό μέγεθος, οι στοιχειώδεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$K \sum_{k=2i-1}^{2i+2} \sum_{l=2j-1}^{2j+2} \alpha_{kl} \frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial x^2} (\sigma_K^x, \sigma_L^y) + K \sum_{k=2i-1}^{2i+2} \sum_{l=2j-1}^{2j+2} \alpha_{kl} \frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial y^2} (\sigma_K^x, \sigma_L^y) = (Q - N) (\sigma_K^x, \sigma_L^y)$$
(29)

για K = 2i - 1, 2i και L = 2j - 1, 2j.

Εργαζόμενοι όπως στο [2], οι στοιχειώδεις εξισώσεις σε μορφή πινάκων γράφονται ως εξής:

$$\sum_{k=2i-1}^{2i+2} \sum_{l=2j-1}^{2j+2} \alpha_{kl} \frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial x^2} (\sigma_K^x, \sigma_L^y) = \left(C_i^{(2)} \otimes C_j^{(0)} \right) \alpha_{ij}$$
(30)

και ισοδύναμα,

$$\sum_{k=2i-1}^{2i+2} \sum_{l=2j-1}^{2j+2} \alpha_{kl} \frac{\partial^2 \Phi_{kl}}{\partial y^2} (\sigma_K^x, \sigma_L^y) = \left(C_i^{(0)} \otimes C_j^{(2)} \right) \alpha_{ij}$$
(31)

όπου $C_i^{(0),(2)},\ C_j^{(0),(2)}$, τα οποία ορίζονται στα [1], [2] και $\alpha_{ij}=\alpha_i\otimes\alpha_j$ για

$$\alpha_{i} = [\alpha_{2i-1}(t) \ \alpha_{2i}(t) \ \alpha_{2i+1}(t) \ \alpha_{2i+2}(t)]^{T}$$
(32)

και

$$\alpha_j = [\alpha_{2j-1}(t) \ \alpha_{2j}(t) \ \alpha_{2j+1}(t) \ \alpha_{2j+2}(t)]^T .$$
(33)

Επιπροσθέτως, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των πολυωνύμων hermite με ως προς τις συνοριακές συνθήκες, οδηγούμαστε στις εξισώσεις:

$$\alpha_{1j}(t) = \alpha_{(2N_x+2)j}(t) = \alpha_{i2}(t) = \alpha_{i(2N_y+2)}(t) = 0.$$
(34)

Οι παραπάνω στοιχειώδεις και συνοριακές Collocation εξισώσεις, καταλήγουν σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:



Δ4.3/32

F c (

$$K\left(C^{(2)} \otimes C^{(0)}\right)\boldsymbol{\alpha} + K\left(C^{(0)} \otimes C^{(2)}\right)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f}$$
(35)

όπου
$$\boldsymbol{f} = \left[f(\sigma_1^x, \sigma^y), f(\sigma_2^x, \sigma^y), \dots, f(\sigma_{2N_x+2}^x, \sigma^y)\right]$$

για $f(x, y) = (Q - N)(x, y)$ και $\sigma^y = \left[\sigma_1^y, \sigma_2^y, \dots, \sigma_{2N_y+2}^y\right].$

2.4.2 Αριθμητικές προσομοιώσεις και αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του συνδυαστικού αλγορίθμου Collocation/ALOPEX και τα συγκρίνουμε, μέσω μιας τυπικής διαδικασίας 500 επαναλήψεων, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που παράγουν τόσο ο αλγόριθμος FEniCS/ALOPEX όσο και ο αλγόριθμος Αναλυτικής Λύσης/ALOPEX (βλέπε [23], [24] and [25] καθώς Παράγραφο 2.1.7).

Όπως εύκολα διαπιστώνουμε από τις επιμέρους εικόνες του Σχήματος 26, η προτεινόμενη βέλτιστη λύση σε κάθε περίπτωση, αντιστοιχεί σε ένα σύνολο αντλήσεων, χρησιμοποιώντας τις οποίες όλα τα πηγάδια παραμένουν ασφαλή. Το υφάλμυρο μέτωπο δεν μπορεί να εισχωρήσει εντός της περιοχής ασφάλειας που εμείς ορίσαμε γύρω από κάθε πηγάδι, εξαιτίας της εφαρμογής των φυσικών περιορισμών του προβλήματος. Η αντικειμενική συνάρτηση, σε λιγότερες από 50 επαναλήψεις, και στις τρεις περιπτώσεις, μεγιστοποιείται προσφέροντας έτσι τις μέγιστες δυνατές αντλήσεις. Στη συνέχεια, για το υπόλοιπο της διαδικασίας, οι τιμές της παραμένουν στην περιοχή της μέγιστης τιμής, εξετάζοντας εναλλακτικές αλλά ισοδύναμες βέλτιστες λύσεις. Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο ALOPEX είναι μια στοχαστική διαδικασία, μέσω της οποίας ένα διαφορετικό μονοπάτι ακολουθείται κάθε φορά για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Το γεγονός αυτό εξηγεί τις διαφορές που παρουσιάζουν οι τρεις παραπάνω διαδικασίες στα αποτελέσματά τους τα οποία έχουν συμπεριληφθεί στον Πίνακα 5.

Problem	Analytical solution	Collocation	FEniCS
Parameters	optimal values	optimal values	optimal values
k (# iter.)	161	383	446
$P(\boldsymbol{Q}^{(k)})$	0.62716	0.63195	0.63211
$Q_1^{(k)}$	209.75	201.16	202.62
$Q_2^{(k)}$	1089.32	317.34	695.46
$Q_3^{(k)}$	1069.24	1101.93	1303.02
$Q_4^{(k)}$	306.39	1342.76	376.06
$Q_5^{(k)}$	1287.18	1068.57	1457.01
$S(\boldsymbol{Q}^{(k)})$	3961.88	4031.76	4034.18

Πίνακας	5:	Βέλτιστες	Τιμές	Αντλή	σεων.
	•••	20,000			





(α΄) Υφάλμυρο μέτωπο, χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση και τις ολικά βέλτιστες αντλήσεις



(γ΄) Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης $P(\boldsymbol{Q}^{(k)})$, χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση.



(στ΄) Ρυθμοί άντλησης Q_i των ενεργών γεωτρήσεων, χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση.



(δ΄) Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης $P(\boldsymbol{Q}^{(k)})$, χρησιμοποιώντας την Collocation μέθοδο.



(ζ΄) Ρυθμοί άντλησης Q_i των (η΄) Ρυθμοί άντλησης Q_i των ενεργών γεωτρήσεων, χρησιμο- ενεργών γεωτρήσεων, χρησιμοποιώντας την Collocation μέ- ποιώντας την FEniCS μέθοδο. θοδο.



(β΄) Κοινό υφάλμυρο μέτωπο, χρησιμοποιώντας τις Collocation και FEniCS μεθόδους και τις βέλτιστες αντλήσεις.



(ε΄) Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης $P(\boldsymbol{Q}^{(k)})$, χρησιμοποιώντας την FEniCS μέθοδο.



Σχήμα 26: Συμπεριφορά της αναλυτικής λύσης, της Collocation μεθόδου και της FEniCS μεθόδου, σε συνεργασία με τον αλγόριθμο στοχαστικής βελτιστοποίησης ALOPEX, για την περίπτωση του υδροφορέα της Καλύμνου, σε έναν τυπικό έλεγχο 500 επαναλήψεων.

Κλείνοντας την παράγραφο σημειώνουμε με έμφαση ότι για τις βέλτιστες τιμές που έχουν συμπεριληφθεί στον Πίνακα 5 δεν έχει προηγηθεί ανάλυση ευστάθειας η οποία βρίσκεται σε εξέλιξη. Είναι ενθαρρυντικό ότι φαίνεται να είναι



δυνατή η θέσπιση κριτηρίων που να διασφαλίζουν την εκ των προτέρων διασφάλιση της ευστάθειας των αποτελεσμάτων.

3 Μελλοντικές Δράσεις

Στους μελλοντικούς στόχους της ερευνητικής ομάδας του έργου είναι:

- Η θέσπιση κριτηρίων βελτιστοποίησης για την διασφάλιση της ευστάθειας των αποτελεσμάτων
- Η βελτιστοποίηση των παραμέτρων του συστήματος των penalties που συνοδεύει τον αλγόριθμο ALOPEX
- Η ανάπτυξη αλγορίθμων Interface Relaxation / ALOPEX
- Η ανάπτυξη και μελέτη HPC παράλληλων τεχνικών
- Η επέκταση του ALOPEX/FEniCS σε τρισδιάστατα μοντέλα
- Η ανάπτυξη και μελέτη του ALOPEX / dDHC για ετερογενείς υδροφορείς.

Τα παραπάνω αποτελούν ένα μικρό υποσύνολο των ερευνητικών δυνατοτήτων και ερευνητικών θεμάτων που δύνανται πλέον να αντιμετωπιστούν με επιτυχία και αφορούν σε σημαντικά περιβαλλοντικά προβλήματα.

4 Παραδοτέα

- Τρεις (3) ετήσιες τεχνικές εκθέσεις και μία (1) τελική τεχνική έκθεση
- Έχουν δημοσιευτεί τα παρακάτω τρία (3) επιστημονικά άρθρα σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων με κριτές:
 - PN Stratis, ZA Dokou, GP Karatzas, EP Papadopoulou and YG Saridakis, Stochastic Optimization and Numerical Simulation for Pumping Management of the Hersonissos Freshwater Coastal Aquifer in Crete, Proc. of INASE-WHH 2015 Recent Advances in Environmental and Earth Sciences and Economics, pp 329-334, 2015.
 - IE Athanasakis, ZA Dokou, EN Mathioudakis, PN Stratis and ND Vilanakis, Combining Stochastic Optimization and Numerical Methods-Software for the Pumping Management of Coastal Aquifers: Case Study of a Rectangular Homogeneous Aquifer, J Math. Mod. Methods in Applied Sciences, 9, pp. 727-732, 2015



 PN Stratis, YG Saridakis, MS Zakynthinaki and EP Papadopoulou, ALOPEX stochastic optimization for pumping management in fresh water coastal aquifers, 2nd Intern. Conf. on Mathematical Modeling in Physical Sciences 2013, Journal of Physics: Conference Series 490 (2014) 012112

Επίσης έχουν υποβληθεί δύο (2) άρθρα για δημοσίευση σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά:

- PN Stratis, GP Karatzas, EP Papadopoulou, MS Zakynthinaki and YG.Saridakis, *Stochastic optimization for an analytical model of saltwater intrusion in coastal aquifers*, PLOSone (Revised version Submitted 2015)
- PN Stratis, ZA Dokou, GP Karatzas, EP Papadopoulou, and YG.Saridakis, PTC Simulations, Stochastic Optimization and Safety Strategies for Groundwater Pumping Management: Case Study of the Hersonissos Coastal Aquifer in Crete, Applied Water Science (submitted 2015)

5 Συνεργασίες

Η παρούσα εργασία όπως και οι δημοσιεύσεις της που ακολούθησαν, είναι προϊόν συνεργασίας των παρακάτω μελών του Πολυτεχνείου Κρήτης:

- Ι. Σαριδάκης, Καθηγητής, Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης
- Ε. Παπαδοπούλου, Καθηγήτρια, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης
- Ε. Μαθιουδάκης, Επίκουρος Καθηγητής, Σχολή Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης
- Γ. Καρατζάς, Καθηγητής, Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος, Πολυτεχνείο Κρήτης
- Π. Στρατής, Υποψήφιος Διδάκτορας, Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης
- Ζ. Δόκου, Διδάκτορας, Σχολή Μηχανικών Περιβάλλοντος, Πολυτεχνείο Κρήτης
- Ι. Αθανασάκης, Υποψήφιος Διδάκτορας, Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης



 Ν. Βιλανάκης, Υποψήφιος Διδάκτορας, Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης

Για την εφαρμογή μεθόδων Interface/Relaxation και Schwarz στα προβλήματα περιβαλλοντικής μηχανικής η ΚΕΟ Πολυτεχνείου Κρήτης συνεργάστηκε με τις ΚΕΟ Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και Πατρών. Τα αποτελέσματα της συνεργασίας αναφέρονται στις τεχνικές εκθέσεις άλλων δράσεων.

Αναφορές

- [1] I. Athanasakis, M. Papadomanolaki, E. Papadopoulou and Y. Saridakis, Discontinuous Hermite Collocation and Diagonally Implicit RK3 for a Brain Tumour Invasion Model, Proceedings of the World Congress on Engineering 2013 Vol I, pp241-246
- [2] I. Athanasakis, E. Papadopoulou and Y. Saridakis, Hermite Collocation and SSPRK Schemes for the Numerical Treatment of a Generalized Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation, Proceedings of The World Congress on Engineering 2015, pp137-142
- [3] S. Alimohammadi and A. AfsharUnit, *Response Matrix Coefficients Development; ANN Approach*, Proceedings of the 5th WSEAS/IASME Int. Conf. on Systems Theory and Scientific Computation, pp.17-25, Malta, September 15-17, 2005.
- [4] R. Ababou and A. Al-Bitar, Salt water intrusion with heterogeneity and uncertainty: mathematical modeling and analyses, Developments Water Sci., 55:1559-1571, 2004.
- [5] M. Aivalioti and G. Karatzas, Modeling the flow and leachate transport in the vadose and saturated Zone - A field application, Env Model Assess., 11(1):81-87, 2006.
- [6] D. Babu, G. Pinder, A. Niemi, D. Ahlfeld and S. Stothoff, *Chemical transport by three-dimensional groundwater flows*, Princeton University, 84-WR-3, USA, 1997.
- [7] Z. Dokou and G. Karatzas, Saltwater intrusion estimation in a karstified coastal system using density-dependent modelling and comparison with the sharp-interface approach, Hydrol. Sci. J., 57(5):985-999, 2012.
- [8] Z. Dokou and G. Pinder, Extension and field application of an integrated DNAPL source identification algorithm that utilizes stochastic modeling and a Kalman filter, J. Hydrol., 398(3-4):277-291, 2011.



- [9] V. Guvanase, S. Wade and M. Barcelo, *Simulation of regional ground water flow and salt water intrusion in Hernando County*, Florida, Ground Water, 38(5):772-783, 2000.
- [10] C.W. Fetter, *Applied Hydrogeology*, Merrill Publishing Company, 1988.
- [11] E. Harth and E. Tzanakou, *Alopex: A stochastic method for determining visual receptive fields*, Vision Research, 14, pp.1475, B1482, 1974.
- [12] G. Karatzas and Z. Dokou, *Managing the saltwater intrusion phenomenon in the coastal aquifer of Malia, Crete using multi-objective optimization*, Hydrogeology, 2015, accepted.
- [13] S. Karterakis, G. Karatzas, I. Nikolos and M. Papadopoulou Application of linear programming and differential evolutionary optimization methodologies for the solution of coastal subsurface water management problems subject to environmental criteria, J. Hydrol., 342(3-4):270-282, 2007.
- [14] M. Koukadaki, G. Karatzas, M. Papadopoulou and A. Vafidis, *Identification of the saline zone in a coastal aquifer using electrical tomography data and simulation*, Water Resour. Manag., 21(11):1881-1898, 2007.
- [15] A. Mantoglou, Pumping management of coastal aquifers using analytical models of saltwater intrusion, Water Resources Research, ISSN 0043-397, 39(12), 2003.
- [16] A. Mantoglou and M. Papantoniou, Optimal Design Of Pumping Networks In Coastal Aquifers Using Sharp Interface Models, J. Hydrol., 361:52-63, 2008.
- [17] A. Mantoglou, M. Papantoniou and P. Giannoulopoulos, *Management* of coastal aquifers based on nonlinear optimization and evolutionary algorithms, J. Hydrol., 297(1-4):209-228, 2004.
- [18] J. Ospina, N. Guarin and M. Velez, Analytical Solutions for Confined Aquifers with non constant Pumping using Computer Algebra, Proceedings of the 2006 IASME/WSEAS Int. Conf. on Water Resources, Hydraulics & Hydrology, pp.7-12, Chalkida, Greece, May 11-13, 2006.
- [19] M. Papadopoulou, E. Varouchakis and G. Karatzas, *Simulation of complex aquifer behaviour using numerical and geostatistical methodologies*, Desalination, 237:42-53, 2009.
- [20] M. Papadopoulou, E. Varouchakis and G. Karatzas, *Terrain Discontinuity Effects in the Regional Flow of a Complex Karstified Aquifer*, Environ. Model Assess, 15(5):319-328, 2010.



- [21] O.D.L. Strack, Groundwater Mechanics, Prentice Hall, 1989.
- [22] P. Stratis, Y. Saridakis, E. Papadopoulou and M. Zakynthinaki, *ALOPEX* stochastic optimization for pumping management in freshwater coastal aquifers, Journal of Physics: Conference Series, 490, 012112, 2014.
- [23] P. Stratis, Z. Dokou, G. Karatzas, E. Papadopoulou and Y. Saridakis, Stochastic Optimization and Numerical Simulation for Pumping Management of the Hersonissos Freshwater Coastal Aquifer in Crete, Procs. of INASE/CSCC-WHH 2015, Recent Advances in Environmental and Earth Sciences and Economics, 329-334, Zakynthos, 2015.
- [24] P. Stratis, Z. Dokou, G. Karatzas, E. Papadopoulou and Y. Saridakis, PTC Simulations, Stochastic Optimization and Safety Strategies for Freshwater Pumping Management: Case Study of the Hersonissos Coastal Aquifer in Crete, Applied Water Sciences, September 2015, submitted.
- [25] P. Stratis, G. Karatzas, E. Papadopoulou, M. Zakynthinaki and Y. Saridakis, Stochastic optimization for an analytical model of saltwater intrusion in coastal aquifers, 2015, (PLOSone submitted).
- [26] T. Reilly and A. Goodman, Quantitative-Analysis of Saltwater Fresh-Water Relationships in Groundwater Systems - a Historical-Perspective, J. Hydrol., 80(1-2):125-160, 1985.
- [27] K. Voudouris, D. Mandilaras and A. Antonakos, *Methods to define the areal distribution of the salt intrusion: Examples from South Greece*, 18 SWIM. Cartagena, Spain. (Ed. Aragus, Custod Io and Manzano), 2004.
- [28] M. Zakynthinaki and Y. Saridakis, *Stochastic optimization for a tip-tilt adaptive correcting system*, Comp. Phys. Commun., 150(3) 274, 2003.
- [29] http://www.fenicsproject.org.
- [30] Logg, Anders, Mardal, Kent-Andre, Wells, Garth Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, (84), 2012.

