

Δράση 2.4 - Μέθοδοι Μετασχηματισμού Φωκά

Ι.Σαριδάκης, Ε. Παπαδοπούλου, Α. Φωκάς,
Α. Σηφαλάκης, Μ. Παπαδομανωλάκη

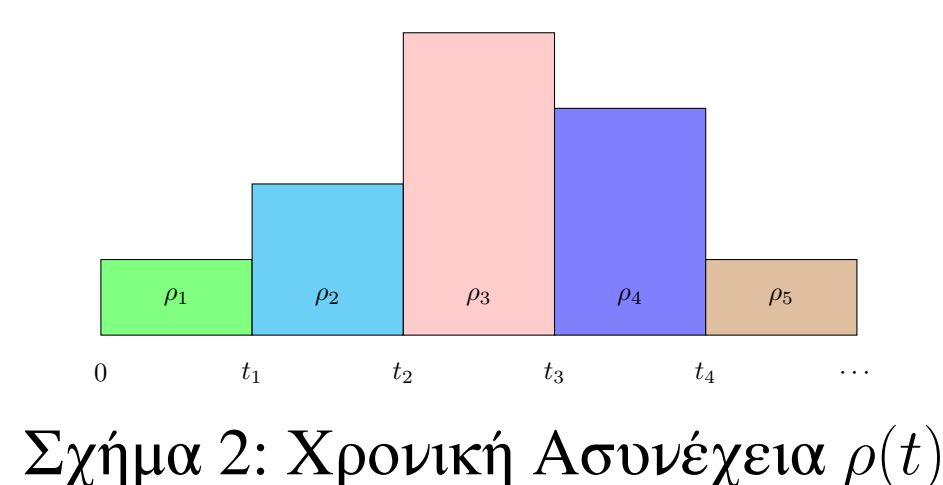
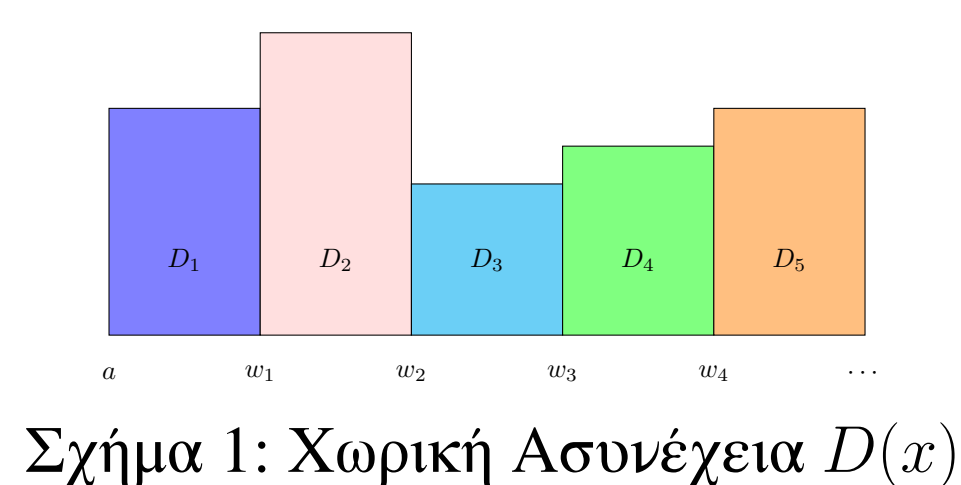
Εργαστήριο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Πολυτεχνείο Κρήτης

Σκοπός

- Μελέτη και προσαρμογή της μεθόδου μετασχηματισμού Φωκά για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων ΜΔΕ με ασυνεχείς συντελεστές.
- Ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων επίλυσης για την άμεση παραγωγή αποτελεσμάτων στον χρόνο χωρίς ενδιάμεσα χρονικά βήματα.
- Εφαρμογή σε ιατρικά μοντέλα.

Ασυνεχές Μοντέλο

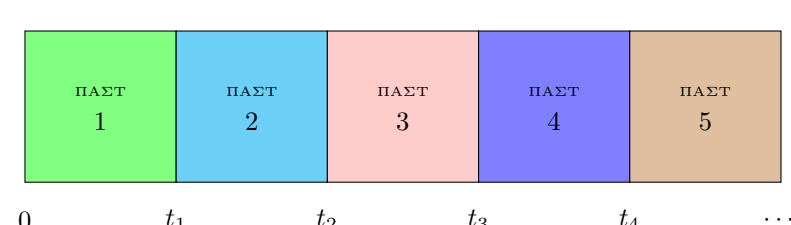
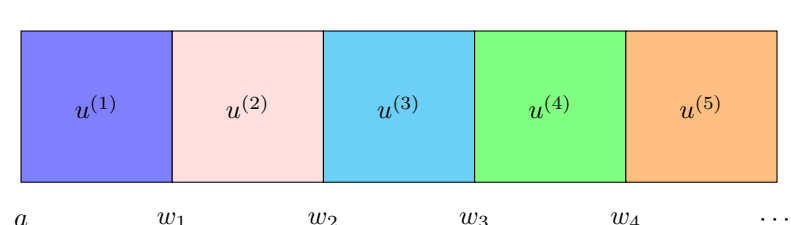
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho(t) u(x, t), & x \in [a, b], 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \end{cases}$$



Αντιμετώπιση Ασυνεχειών

Χωρική Ασυνέχεια: Θεωρούμε ένα διαφορετικό Πρόβλημα Αρχικών Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ) σε κάθε χωρική περιοχή. Απαιτούμε κάθε ΠΑΣΤ να συνδέεται με τα γειτονικά του μέσω συνθηκών συμβατότητας οι οποίες εξασφαλίζουν την συνέχεια της λύσης και την ασυνέχεια της παραγώγου.

Χρονική Ασυνέχεια: Σε κάθε χρονική περιοχή επιλύουμε ένα διαφορετικό ΠΑΣΤ. Το κάθε ΠΑΣΤ συνδέεται μόνο με το αμέσως προηγούμενο του. Η αρχική συνθήκη του $(n + 1)$ ΠΑΣΤ είναι η λύση, στον χρόνο t_n , του (n) -οστού ΠΑΣΤ.



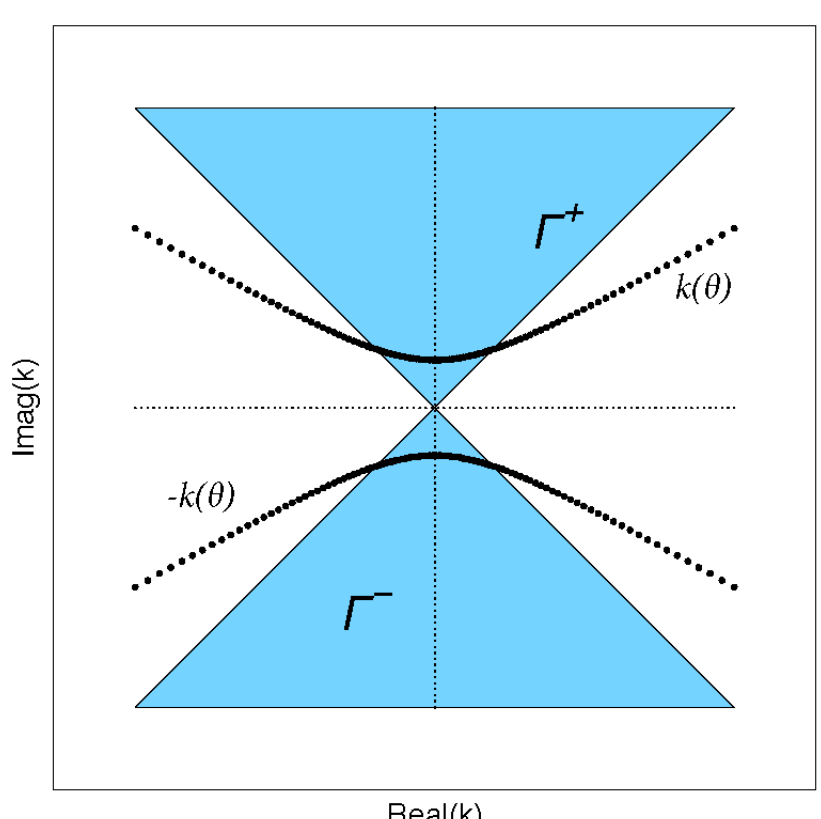
Ολοκληρωτική Μορφή Λύσης

Η λύση στην πρώτη χρονική περιοχή $(t \in [0, t_1])$ έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} u^{(j)}(x, t) &= \frac{c_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j k x - k^2 t} \tilde{f}^{(j)}(c_j k) dk \\ &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k(x-w_{j-1}) - k^2 t} [\tilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \tilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)] dk \\ &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k(x-w_j) - k^2 t} [\tilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \tilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)] dk \end{aligned}$$

Μονοπάτια Ολοκλήρωσης

Τα μονοπάτια ολοκλήρωσης $(-\infty, \infty)$ του πραγματικού επιπέδου μεταφέρονται στα $\partial\Gamma^+$ και $\partial\Gamma^-$ του μιγαδικού επιπέδου κάνοντας χρήση του θεωρήματος Cauchy και του λήμματος Jordan.

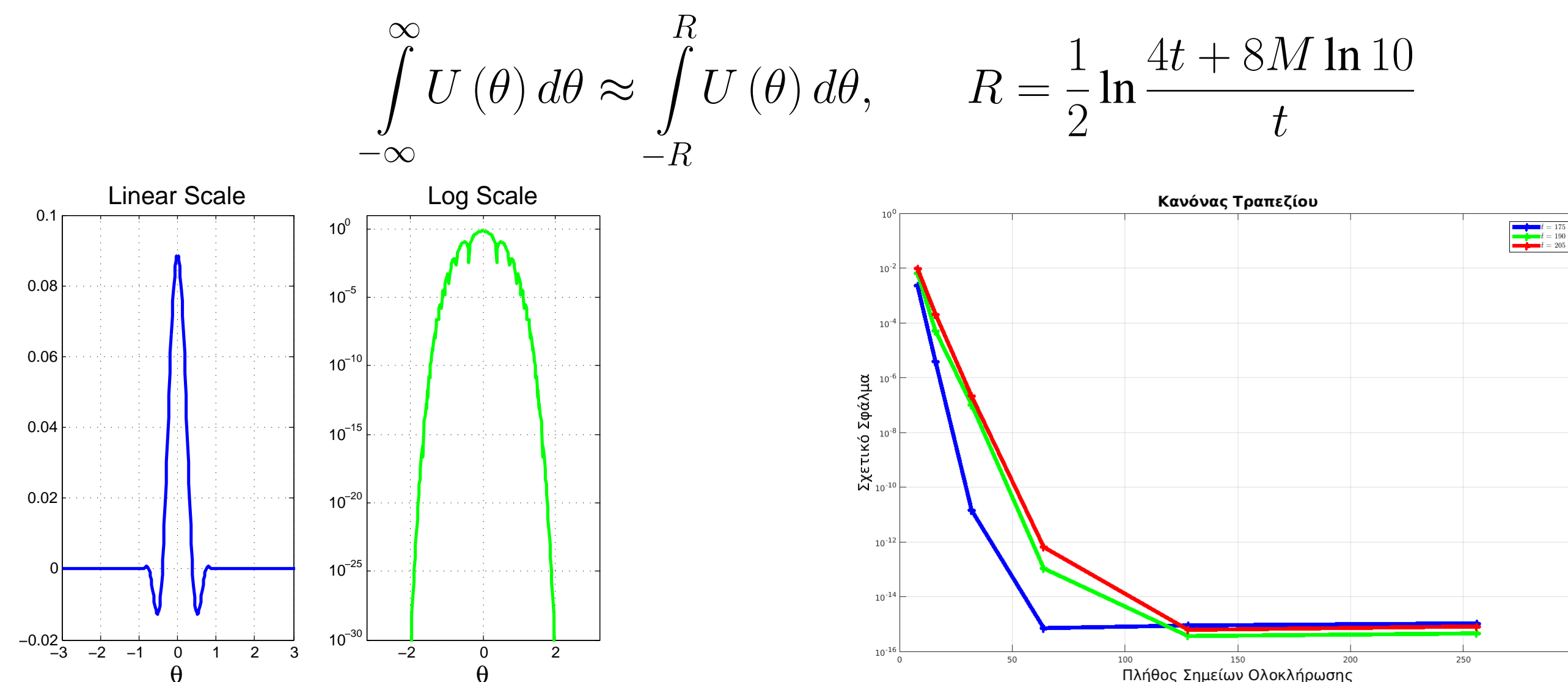


Στη συνέχεια, για να επιτύχουμε ταχεία αριθμητική σύγκλιση του κανόνα ολοκλήρωσης, μεταφέρουμε τα μονοπάτια ολοκλήρωσης σε δυο υπερβολές.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \rightarrow \int_{\partial\Gamma^{\pm}} dk \rightarrow \int_{k^{\pm}(\theta)}$$

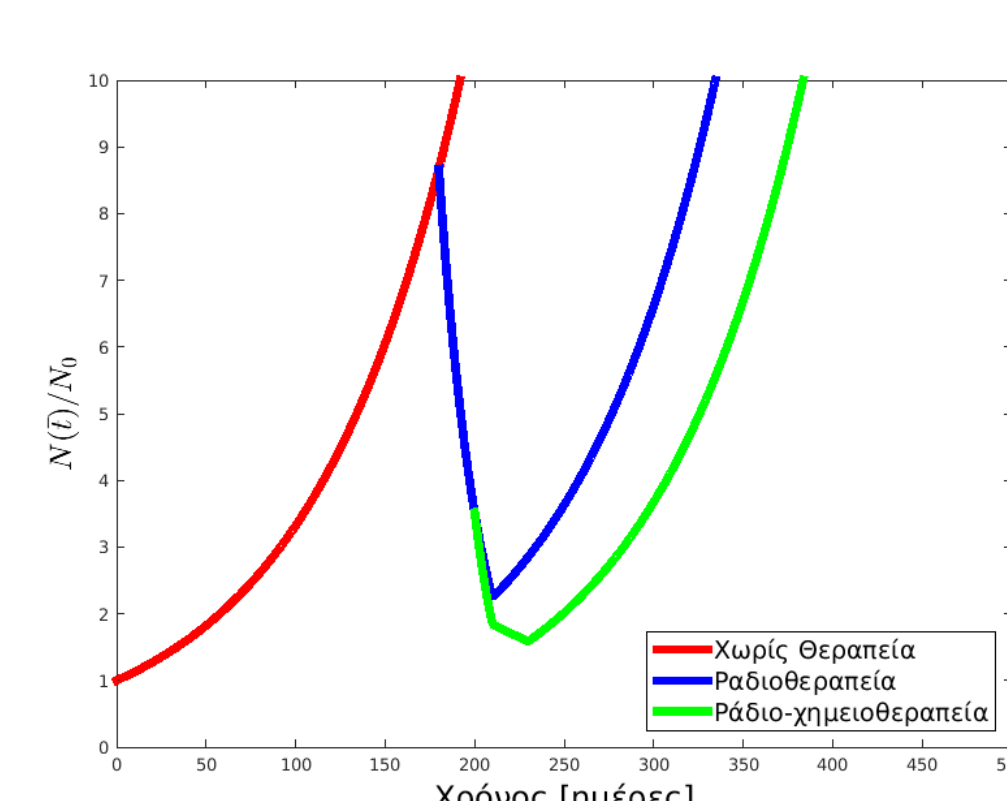
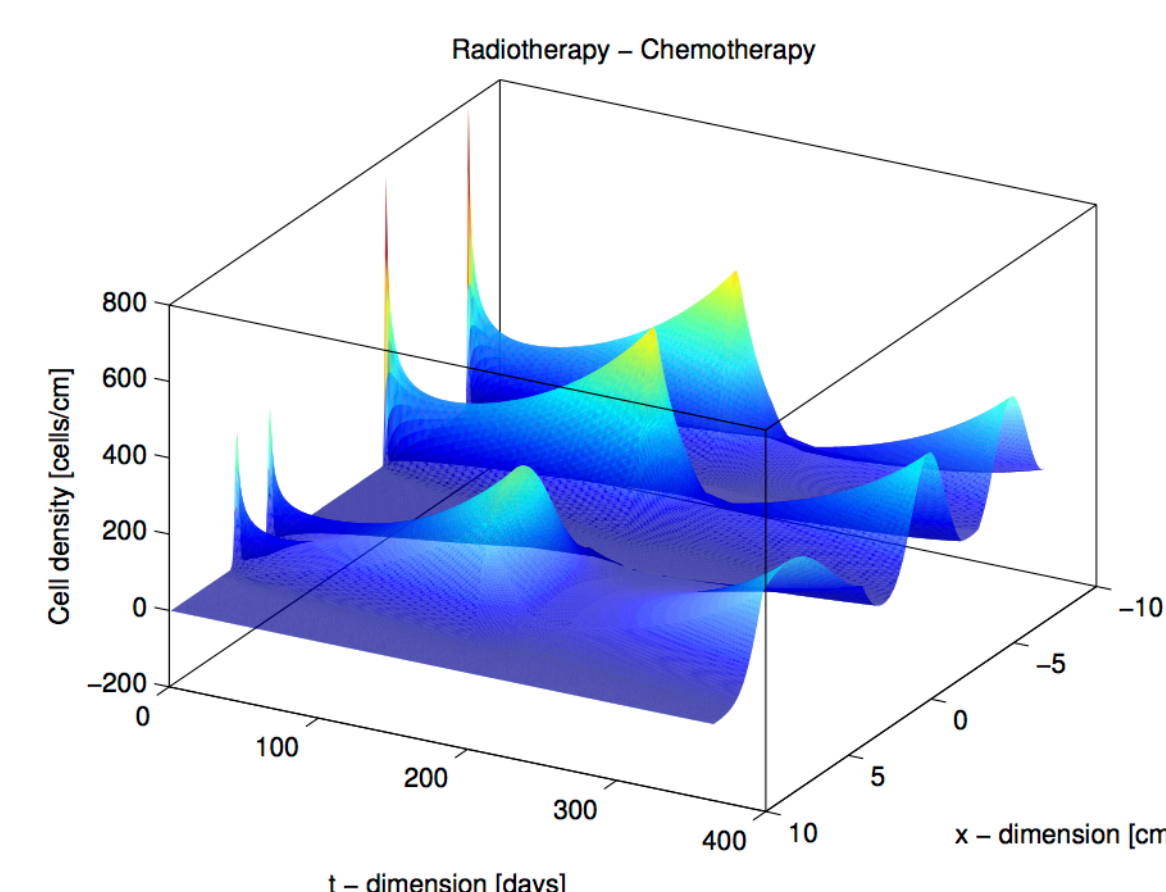
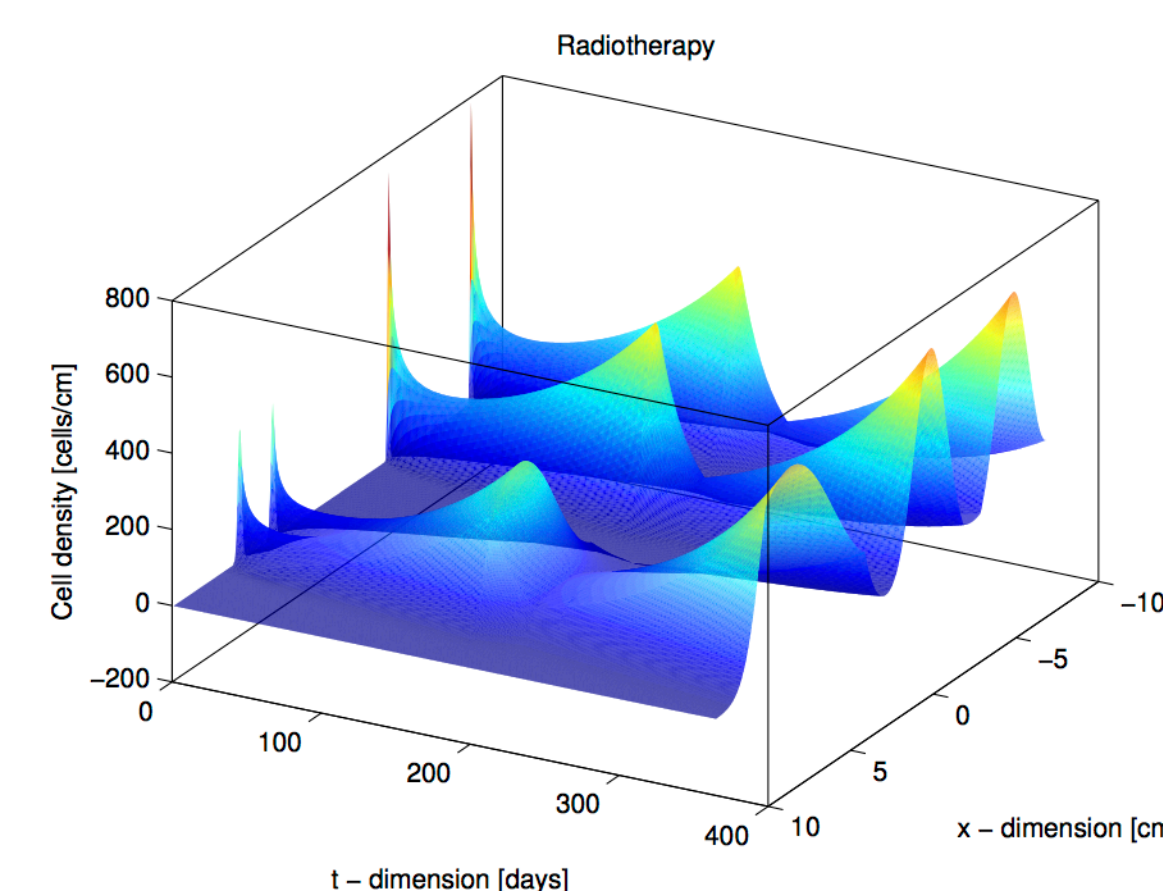
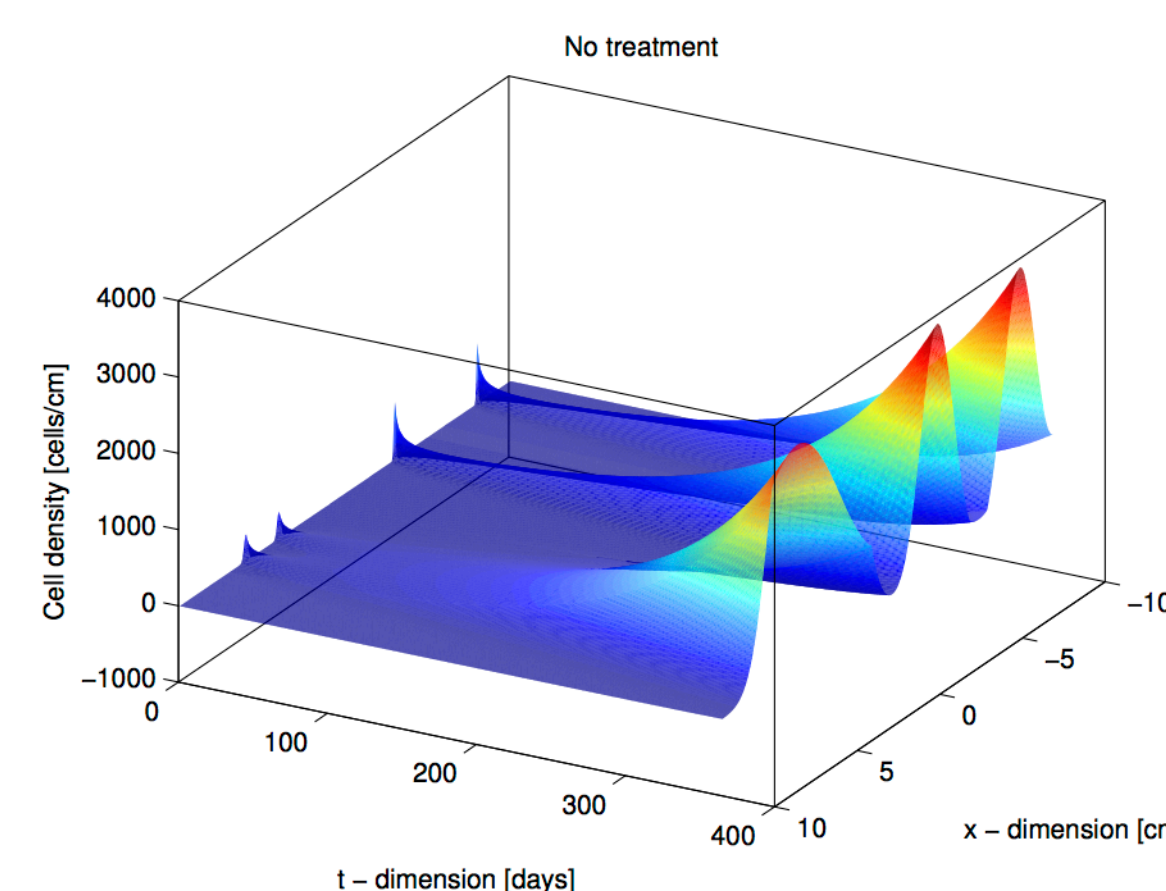
Σύγκλιση

Οι προς ολοκλήρωση ποσότητες μειώνονται εκθετικά γρήγορα. Έτσι μπορούμε να περιορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης (στις υπερβολές) από $-\infty < \theta < \infty$ σε $-R < \theta < R$. Ο κανόνας του τραπέζιου, πάνω στις υπερβολές, παρουσιάζει σχεδόν εκθετική σύγκλιση.



Εφαρμογή σε Ιατρικά Μοντέλα

Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά σε μοντέλα διάχυσης καρκινικών όγκων στον εγκέφαλο. Σε αυτά τα μοντέλα παρουσιάζονται χρονικές ασυνέχειες λόγω της ανομοιογένειας του εγκεφαλικού ιστού και χρονικές ασυνέχειες λόγω της έναρξης και παύσης της ραδιοθεραπείας και της χημειοθεραπείας.



Παραδοτέα

- Παπαδομανωλάκη Μαρία, "Η μέθοδος Collocation για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης: στην κατεύθυνση προσομοίωσης καρκινικών όγκων εγκεφάλου." Διδακτορική Διατριβή 2012.
- Δ. Μαντζαβίνος, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ι. Σαριδάκης, Α. Σηφαλάκης "Fokas transform method for a brain tumor invasion model with heterogeneous diffusion in 1+1 dimensions", Applied Numerical Mathematics, doi:10.1016/j.apnum.2014.09.006
- Μ. Ασβεστάς "Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά στο μαθηματικό μοντέλο διάχυσης των καρκινικών κυττάρων σε n+1 εγκεφαλικές περιοχές", Μεταπτυχιακή Διατριβή 2013
- Μ. Ασβεστάς, Α. Σηφαλάκης, Ε. Παπαδοπούλου, Ι. Σαριδάκης, "Fokas method for a multi-domain linear reaction-diffusion equation with discontinuous diffusivity", 2nd International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences 2013
- Μ. Ασβεστάς, Ε. Παπαδοπούλου, Α. Σηφαλάκης, Ι. Σαριδάκης "The Unified Transform for a Class of Reaction-Diffusion Problems with Discontinuous Time Dependent Parameters", World Congress of Engineering 2015
- Α. Σηφαλάκης, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ε. Παπαδοπούλου και Ι. Σαριδάκης "The Unified Transform for a Reaction-Diffusion Brain Tumor Model that Incorporates Tissue Heterogeneity and Radiotherapy", 19th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, (CSCC 2015)
- Α. Σηφαλάκης, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ε. Παπαδοπούλου και Ι. Σαριδάκης, "The Fokas Method for Heterogeneous Reaction-Diffusion Brain Tumor Models that Incorporate Radiotherapy and Chemotherapy", extended version - submitted
- Α. Φωκάς, Α. Χειμωνάς και Δ. Μαντζαβίνος, "The non-linear Schrödinger equation on the half-line", Transactions of the American Mathematical Society (accepted)

