

Θαλής MATENVMED - ΜΙΣ 379416

Δράση 2.4 - Μέθοδοι Μετασχηματισμού Φωκά

Ασβεστάς Μάριος¹, Μαντζαβίνος Διονύσιος²,
Παπαδομανωλάκη Μαριάννα¹, Παπαδοπούλου Έλενα¹,
Σαριδάκης Γιάννης¹, Σηφαλάκης Τάσος¹, Φωκάς
Αθανάσιος²

²Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Θεωρητικής Φυσικής
Πανεπιστήμιο Cambridge
Cambridge CB3 0WA, UK

¹Εργαστήριο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Ηλεκτρονικών Υπολογιστών,
Πολυτεχνείο Κρήτης

Νοέμβριος 2015

”Η βασική ερευνητική δραστηριότητα που θα αναπτυχθεί στοχεύει στην **μελέτη και προσαρμογή** της καινοτόμου αυτής μαθηματικής μεθόδου μετασχηματισμού-Φωκά για την επίλυση σύνθετων **προβλημάτων ΜΔΕ με ασυνεχείς συντελεστές**. Στην διαδικασία αυτή περιλαμβάνεται η ανάπτυξη αναλυτικών ή **αριθμητικών μεθόδων επίλυσης** των γενικευμένων συνθηκών ή των αντίστοιχων *Dirichlet-Neumann* απεικονίσεων στην περίπτωση ασυνεχών συντελεστών καθώς και η ανάπτυξη λύσεων κλειστής μορφής ως προς τον χρόνο σε **ευαίσθητα εξελικτικά προβλήματα αιχμής** (π.χ. πρόβλημα εξέλιξης καρκινικών όγκων εγκεφάλου) για την άμεση παραγωγή αποτελεσμάτων στον χρόνο χωρίς ενδιάμεσα χρονικά βήματα.”

Στόχος 1 **Επέκταση** μεθόδου σε ΜΔΕ με ασυνεχείς συντελεστές

Στόχος 2 **Αριθμητική** λύση

Στόχος 3 **Εφαρμογή** σε εξελικτικά προβλήματα

Γιατί Μέθοδος Μετασχηματισμού Φωκά?

Συνεχές Π.Α.Τ.:

$$\begin{cases} q_t = q_{xx} & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T] \\ q(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση:

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - k^2 t} \widehat{f}(k) dk$$

- Αναλυτική (ακριβής) λύση σε κλειστή μορφή
- Η λύση δεν εξαρτάται από προηγούμενα χρονικά βήματα
- Έχει καλή αριθμητική συμπεριφορά

Μέθοδος Φωκά

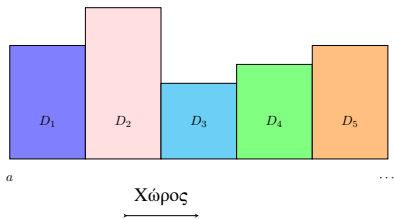
- Διαφορετικές ΜΔΕ (συνεχείς συντελεστές)
- Διαφορετικά χωρία (συνεχείς συντελεστές)
- Καμία ΜΔΕ με ασυνεχείς συντελεστές

Αριθμητική Υλοποίηση

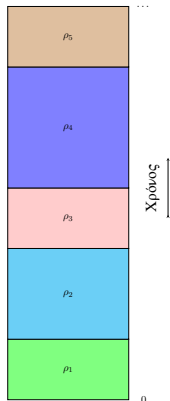
- Flyer, Φωκάς (2008) (σταθεροί συντελεστές)
- Παπαθεοδώρου - Κανδύλη (2009) (σταθεροί συντελεστές)
- Καμία ΜΔΕ με ασυνεχείς συντελεστές

Ασυνεχές Μοντέλο

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \rho(t)c(x, t), \\ c(x, 0) = f(x) \\ c_x(a, t) = c_x(b, t) = 0 \\ x \in [a, b], 0 < t \leq T \end{array} \right.$$

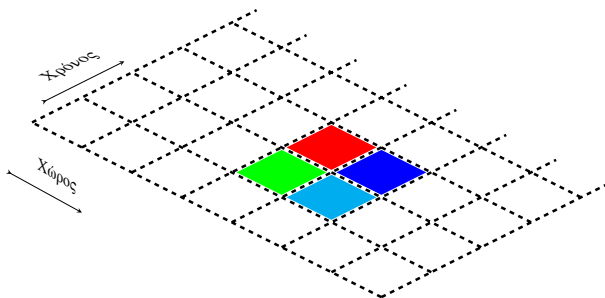


Σχήμα: Χωρικά ασυνεχής συντελεστής $D(x)$.



Σχήμα: Χρονικά ασυνεχής συντελεστής $\rho(t)$.

Μετασχηματισμένα Συνεχή Υποπροβλήματα

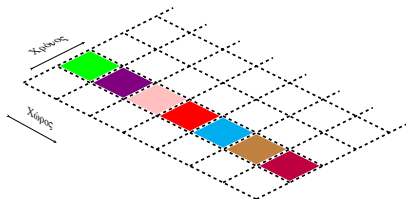


Χρονικοί Μετασχηματισμοί

$$u(x, t) = e^{-R(t)} c(x, t) \text{ με } R(t) = \int_0^t \rho(s) ds,$$

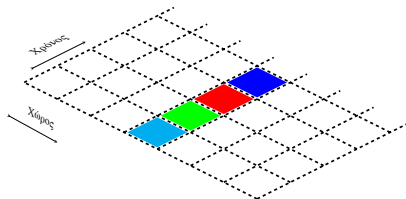
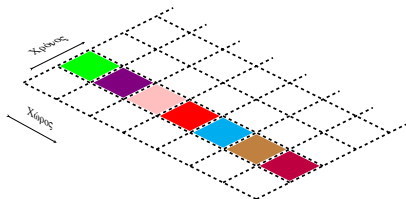
$$u_t = D_i u_{xx}$$

σε κάθε i -υποχωρίο.



Χωρικές ασυνέχειες

- $u^{(j)} = u^{(j+1)}$
- $D_j u_x^{(j)} = D_{j+1} u_x^{(j+1)}$



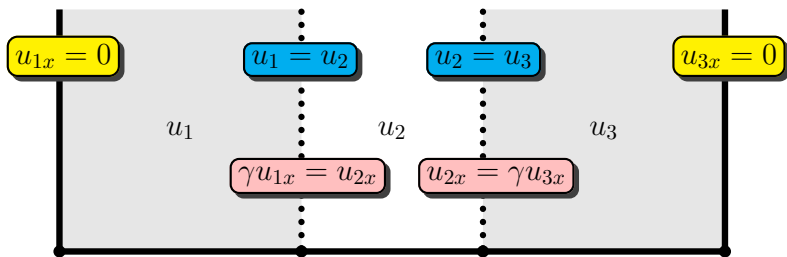
Χωρικές ασυνέχειες

- $u^{(j)} = u^{(j+1)}$
- $D_j u_x^{(j)} = D_{j+1} u_x^{(j+1)}$

Χρονικές ασυνέχειες

Επανεκκίνηση της μεθόδου κάθε φορά που εμφανίζεται ασυνέχεια στον χρόνο ($\rho(t)$).

Συνοριακές Συνθήκες - Συνθήκες Συμβατότητας



Η Ολική Συνθήκη (στην Πρώτη Περιοχή)

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_1(k, t) = \hat{f}_1(k) + \gamma e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{1x}(w_1, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(w_1, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ika} [\tilde{u}_{1x}(a, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(a, \gamma k^2)]$$

$\hat{u}_1(k, t) = \int_a^{w_1} e^{-ikx} u_1(x, t) dx$	Μετασχηματισμός Fourier
$\hat{f}_1(r) = \int_a^{w_1} e^{-irx} f_1(x) dx$	Μετασχηματισμός Fourier
$\tilde{u}_1(*, \gamma k^2) = \int_0^t e^{\gamma k^2 s} u_1(*, s) ds$	t-μετασχηματισμός
$\tilde{u}_{1x}(*, \gamma k^2) = \int_0^t e^{\gamma k^2 s} u_{1x}(*, s) ds$	t-μετασχηματισμός

1η περιοχή

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_1(k, t) = \hat{f}_1(k) + \gamma e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{1x}(w_1, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(w_1, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ika} [\tilde{u}_{1x}(a, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_1(a, \gamma k^2)]$$

2η περιοχή

$$e^{k^2 t} \hat{u}_2(k, t) = \hat{f}_2(k) + e^{-ikw_2} [\tilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ik\tilde{u}_2(w_2, k^2)] \\ - e^{-ikw_1} [\tilde{u}_{2x}(w_1, k^2) + ik\tilde{u}_2(w_1, k^2)]$$

3η περιοχή

$$e^{\gamma k^2 t} \hat{u}_3(k, t) = \hat{f}_3(k) + \gamma e^{-ikb} [\tilde{u}_{3x}(b, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_3(b, \gamma k^2)] \\ - \gamma e^{-ikw_2} [\tilde{u}_{3x}(w_2, \gamma k^2) + ik\tilde{u}_3(w_2, \gamma k^2)]$$

Οι Ολικές Συνθήκες (β)

1η περιοχή

$$e^{k^2 t} \widehat{u}_1(ck, t) = \widehat{f}_1(ck) + \gamma e^{-ickw_1} [\widetilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick\widetilde{u}_1(w_1, k^2)] - \gamma e^{-icka} ick\widetilde{u}_1(a, k^2)$$

2η περιοχή

$$e^{k^2 t} \widehat{u}_2(k, t) = \widehat{f}_2(k) + e^{-ikw_2} [\widetilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ik\widetilde{u}_2(w_2, k^2)] - e^{-ikw_1} [\gamma \widetilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ik\widetilde{u}_1(w_1, k^2)]$$

3η περιοχή

$$e^{k^2 t} \widehat{u}_3(ck, t) = \widehat{f}_3(ck) + \gamma e^{-ickb} ick\widetilde{u}_3(b, k^2) - \gamma e^{-ickw_2} \left[\frac{1}{\gamma} \widetilde{u}_{2x}(w_2, k^2) + ick\widetilde{u}_2(w_2, k^2) \right]$$

όπου $c = \gamma^{-1/2}$

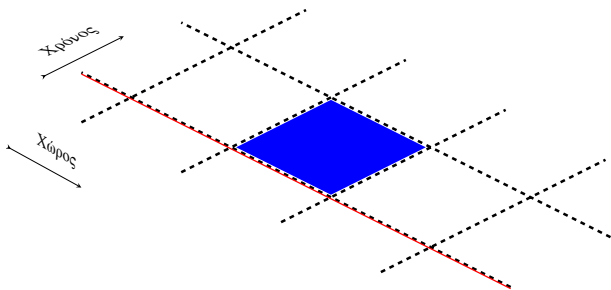
n Περιοχές - Γραμμικό Σύστημα $(2n) \times (2n)$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{W}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B^1 & D^1 & E^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F^1 & H^1 & I^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & C^2 & D^2 & E^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F^2 & G^2 & H^2 & I^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B^{n-1} & C^{n-1} & D^{n-1} & E^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F^{n-1} & G^{n-1} & H^{n-1} & I^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B^n & C^n & D^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & F^n & G^n & H^n \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} B^j = +ic_j\gamma_j k e^{-ic_j k w_{j-1}} \\ D^j = -ic_j\gamma_j k e^{-ic_j k w_j} \\ F^j = -ic_j\gamma_j k e^{ic_j k w_{j-1}} \\ H^j = +ic_j\gamma_j k e^{ic_j k w_j} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} C^j = +\gamma_{j-1} e^{-ic_j k w_{j-1}} \\ E^j = -\gamma_j e^{-ic_j k w_j} \\ G^j = +\gamma_{j-1} e^{ic_j k w_{j-1}} \\ I^j = -\gamma_j e^{ic_j k w_j} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \gamma_j = \gamma, \quad j = 1, 3, 5, \dots \\ \gamma_j = 1, \quad j = 2, 4, 6, \dots \\ w_0 = a \\ w_n = b \end{array} \right|$$

Ολοκληρωτική Αναπαράσταση της λύσης



$$\begin{aligned} u^{(j)}(x, t) &= \frac{c_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j kx - k^2 t} \widehat{F}^{(j)}(c_j k) dk \\ &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k(x-w_{j-1}) - k^2 t} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)] dk \\ &- \frac{1}{2\pi c_j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ic_j k(x-w_j) - k^2 t} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)] dk \end{aligned}$$

(1)

Μονοπάτια Ολοκλήρωσης

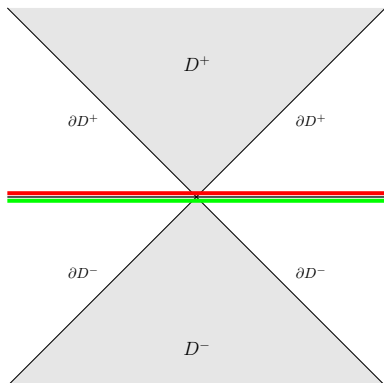
πραγματικός άξονας στο ∂D^+

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^+} U(k) dk$$

πραγματικός άξονας στο ∂D^-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^-} U(k) dk$$

Complex Plane \mathbb{C}



Μονοπάτια Ολοκλήρωσης

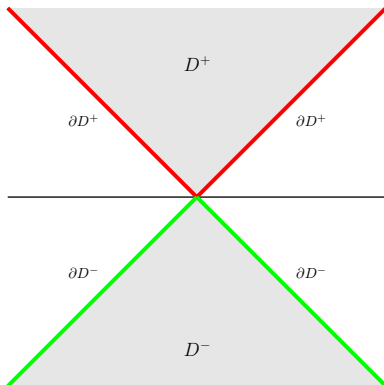
πραγματικός άξονας στο ∂D^+

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^+} U(k) dk$$

πραγματικός άξονας στο ∂D^-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(k) dk \longrightarrow \int_{\partial D^-} U(k) dk$$

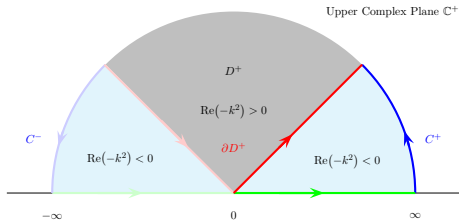
Complex Plane \mathbb{C}



Μονοπάτια Ολοκλήρωσης (συν.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} i k e^{i c k(x-a)} e^{-k^2 t} U(k) dk$$

- $e^{i c k(x-a)}$ αναλυτική για $Im [k] \geq 0$
- $e^{-k^2 t}$ αναλυτική για $Re [-k^2] \leq 0$
- $D = \{k \in \mathbb{C} : Re k^2 < 0\}$
- $i k e^{i c k(x-a)} e^{-k^2 t} U(k)$ αναλυτική στο $\mathbb{C}^+ \setminus D$



- Cauchy: $\int_{\text{πράσινο}} + \int_{\text{μπλέ}} - \int_{\text{κόκκινο}} = 0$
- Jordan: $\int_{\text{μπλέ}} = 0$

$$\begin{aligned}u^{(j)}(x, t) &= \frac{c_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ic_j kx - k^2 t} \widehat{F}^{(j)}(c_j k) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi c_j} \int_{D^+} e^{ic_j k(x - w_{j-1}) - k^2 t} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_{j-1}, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_{j-1}, k^2)] dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi c_j} \int_{D^-} e^{ic_j k(x - w_j) - k^2 t} [\widetilde{u}_x^{(j)}(w_j, k^2) + ic_j k \widetilde{u}^{(j)}(w_j, k^2)] dk\end{aligned}$$

Μέθοδος Φωκά

- Επεκτείνεται **αβίαστα** σε προβλήματα με ασυνεχείς συντελεστές
- Αναλυτική λύση (σε ολοκληρωτική μορφή)
- Δεν χρειάζεται η λύση σε προηγούμενα χρονικά βήματα

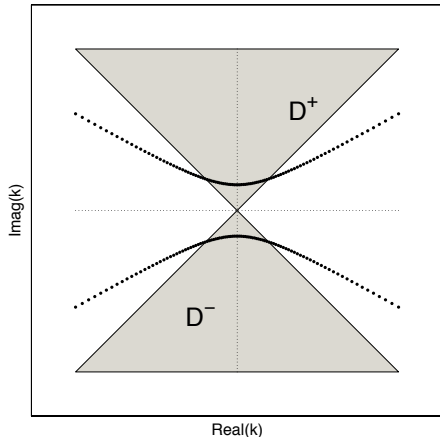
Υπερβολικά Μονοπάτια

Υπερβολή

$$\int_{\partial D^+} dk \longrightarrow \int_{\text{Υπερβολή}} dk$$

Παραμετροποίηση

$$k = k(\theta) = \pm i \sin(\beta - i\theta)$$



Κατάλληλη για Αριθμητική Μέθοδος

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\theta) d\theta \approx \int_{-R}^R U(\theta) d\theta$$

Ερώτηση

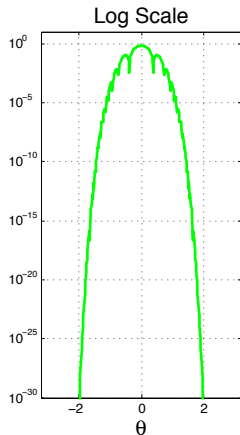
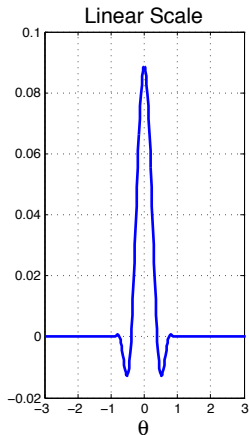
Πώς να επιλέξουμε το R?

$$\int_{-R}^R e^{ick(x-a)} e^{-k^2 t} U(k) d\theta$$

Απάντηση

$$\|e^{-k^2 t}\| \leq 10^{-M} \implies$$

$$R = \frac{1}{2} \ln \frac{4t + 8M \ln 10}{t}$$

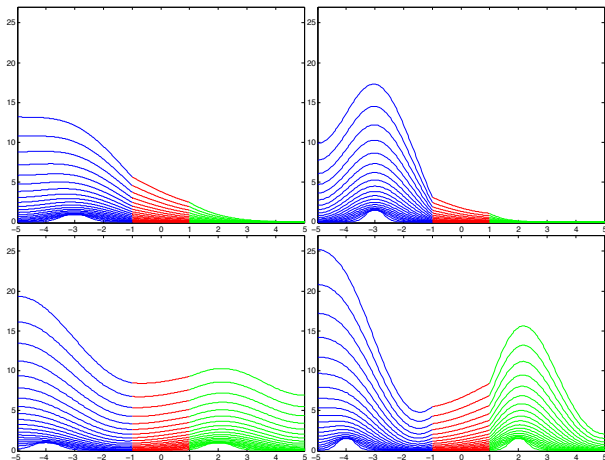


Σχήμα: Πραγματικό μέρος ολοκληρωτέου

Επαναλαμβανόμενοι Υπολογισμοί

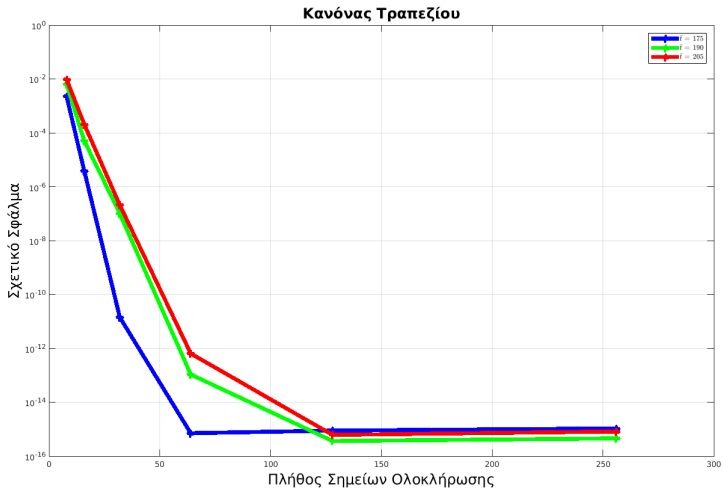
$$\begin{aligned}u_1(\mathbf{x}_1, t) &= \dots + \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_1}^{R_1} e^{ick(\mathbf{x}_1 - w_1)} e^{-k^2 t} [\tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick\tilde{u}_1(w_1, k^2)] d\theta \\ &\quad - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_2}^{R_2} ike^{ick(\mathbf{x}_1 - a)} e^{-k^2 t} \tilde{u}_1(a, k^2) d\theta \\ u_1(\mathbf{x}_2, t) &= \dots + \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_3}^{R_3} e^{ick(x_2 - w_1)} e^{-k^2 t} [\tilde{u}_{1x}(w_1, k^2) + ick\tilde{u}_1(w_1, k^2)] d\theta \\ &\quad - \frac{c\gamma}{2\pi} \int_{-R_4}^{R_4} ike^{ick(x_2 - a)} e^{-k^2 t} \tilde{u}_1(a, k^2) d\theta\end{aligned}$$

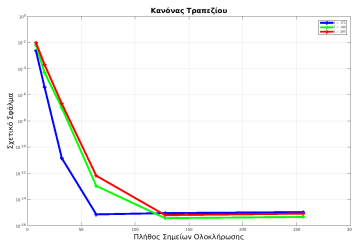
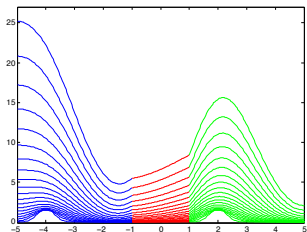
Χρησιμοποιούμε κανόνα ολοκλήρωσης με τα ίδια σημεία ολοκλήρωσης για όλα τα διαφορετικά χωρικά σημεία (x_i, t)



Σχήμα: Αριθμητικές λύσεις

Αριθμητική Ολοκλήρωση: Σύγκλιση





Αριθμητική Λύση

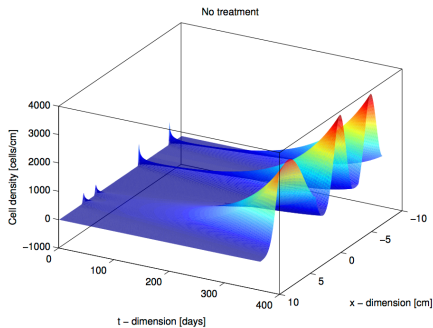
- Ομαλή συμπεριφορά της λύσης
- Λύση συνεχής παντού και λεία παντού εκτός από τα σημεία χωρικής ασυνέχειας
- Σχεδόν εκθετική σύγκλιση των κανόνων ολοκλήρωσης (για "καλές" αρχικές συνθήκες)
- Χρόνος (σε pc) τάξης milliseconds για μερικά σημεία και τάξης milliseconds/10 για τα υπόλοιπα σημεία

Εφαρμογή σε Ιατρικά Μοντέλα

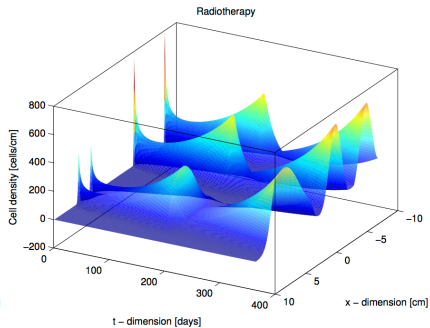
Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά σε μοντέλα διάδοσης καρκινικών όγκων εγκεφάλου. Σε αυτά τα μοντέλα παρουσιάζονται χρονικές ασυνέχειες λόγω της ανομοιογένειας του εγκεφαλικού ιστού και χρονικές ασυνέχειες λόγω της έναρξης και παύσης της ραδιοθεραπείας και της χημειοθεραπείας.

Growth	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_w \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c}$	\bar{T}_F
	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{G} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_w \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{G} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{G} \bar{c}$	
Radiotherapy	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{R} \bar{c} - \bar{G} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_w \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{R} \bar{c} - \bar{G} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{R} \bar{c} - \bar{G} \bar{c}$	\bar{T}_M
	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{R} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_w \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{R} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c} - \bar{R} \bar{c}$	\bar{T}_R
Growth	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_w \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c}$	$\bar{c}_t = (D_g \bar{c}_x)_x + \bar{\rho} \bar{c}$	\bar{T}_G
	$\bar{x} \in \bar{\Omega}_g$	$\bar{x} \in \bar{\Omega}_w$	$\bar{x} \in \bar{\Omega}_g$	0

Εφαρμογή σε Ιατρικά Μοντέλα: Αποτελέσματα

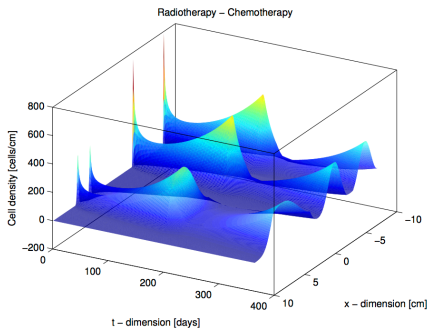
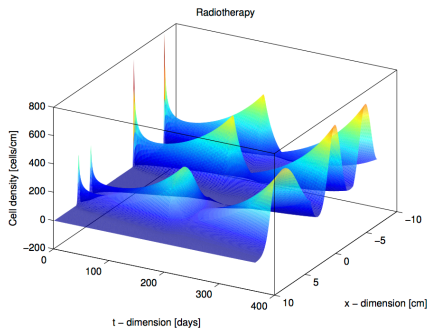


(α) Χωρίς θεραπεία



(β) Μόνο ραδιοθεραπεία

Εφαρμογή σε Ιατρικά Μοντέλα: Αποτελέσματα



(β) Μόνο ραδιοθεραπεία

(γ) Ραδιοθεραπεία και χημειοθεραπεία

Εφαρμογή Μεθόδου σε Πρόβλημα Εξέλιξης Καρκινικών Όγκων Εγκεφάλου

- Ομαλή συμπεριφορά της λύσης
- Λύση συνεχής παντού και λεία παντού εκτός από τα σημεία χωρικής ασυνέχειας
- Σχεδόν εκθετική σύγκλιση των κανόνων ολοκλήρωσης (για "καλές" αρχικές συνθήκες)
- Ιατρικά συμπεράσματα

Συμπεράσματα

- Επεκτείνεται αβίαστα σε προβλήματα με ασυνεχείς συντελεστές
- Αναλυτική λύση
- Δεν χρειάζεται η λύση σε προηγούμενα χρονικά βήματα
- Ομαλή συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης
- Σχεδόν εκθετική σύγκλιση των κανόνων ολοκλήρωσης.

Μελοντικά ...

- Η μη επανεκκίνηση στις χρονικές ασυνέχειες
- Βελτίωση σύγκλισης για τυχαίες αρχικές συνθήκες
- Επέκταση και σε πιο σύνθετα μοντέλα
- Επέκταση σε παραπάνω χωρικές διαστάσεις

- Παπαδομανωλάκη Μαρία, " Η μέθοδος Collocation για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης: στην κατεύθυνση προσομοίωσης καρκινικών όγκων εγκεφάλου." Διδακτορική Διατριβή 2012.
- Δ. Μαντζαβίνος, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ι. Σαριδάκης, Α. Σηφαλάκης "Fokas transform method for a brain tumor invasion model with heterogeneous diffusion in 1+1 dimensions", Applied Numerical Mathematics, doi:10.1016/j.apnum.2014.09.006
- Μ. Ασβεστάς "Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά στο μαθηματικό μοντέλο διάχυσης των καρκινικών κυττάρων σε n+1 εγκεφαλικές περιοχές", Μεταπτυχιακή Διατριβή 2013
- Μ. Ασβεστάς, Α. Σηφαλάκης, Ε. Παπαδοπούλου, Ι. Σαριδάκης, "Fokas method for a multi-domain linear reaction-diffusion equation with discontinuous diffusivity" , 2nd International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences 2013
- Μ. Ασβεστάς, Ε. Παπαδοπούλου, Α. Σηφαλάκης, Ι. Σαριδάκης "The Unified Transform for a Class of Reaction-Diffusion Problems with Discontinuous Time Dependent Parameters" , World Congress of Engineering 2015
- Α. Σηφαλάκης, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ε. Παπαδοπούλου και Ι. Σαριδάκης, "The Fokas Method for Heterogeneous Reaction-Diffusion Brain Tumor Models that Incorporate Radiotherapy and Chemotherapy", extended version - submitted
- Α. Φωκάς, Α. Χειμωνάς και Δ. Μαντζαβίνος, "The non-linear Schrödinger equation on the half-line", Transactions of the American Mathematical Society (accepted)

- Παπαδομανωλάκη Μαρία, " Η μέθοδος Collocation για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με ασυνεχή συντελεστή διάχυσης: στην κατεύθυνση προσομοίωσης καρκινικών όγκων εγκεφάλου." Διδακτορική Διατριβή 2012.
- Δ. Μαντζαβίνος, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ι. Σαριδάκης, Α. Σηφαλάκης "Fokas transform method for a brain tumor invasion model with heterogeneous diffusion in 1+1 dimensions", Applied Numerical Mathematics, doi:10.1016/j.apnum.2014.09.006
- Μ. Ασβεστάς "Εφαρμογή της μεθόδου Φωκά στο μαθηματικό μοντέλο διάχυσης των καρκινικών κυττάρων σε n+1 εγκεφαλικές περιοχές", Μεταπτυχιακή Διατριβή 2013
- Μ. Ασβεστάς, Α. Σηφαλάκης, Ε. Παπαδοπούλου, Ι. Σαριδάκης, "Fokas method for a multi-domain linear reaction-diffusion equation with discontinuous diffusivity", 2nd International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences 2013
- Μ. Ασβεστάς, Ε. Παπαδοπούλου, Α. Σηφαλάκης, Ι. Σαριδάκης "The Unified Transform for a Class of Reaction-Diffusion Problems with Discontinuous Time Dependent Parameters", World Congress of Engineering 2015
- Α. Σηφαλάκης, Μ. Παπαδομανωλάκη, Ε. Παπαδοπούλου και Ι. Σαριδάκης, "The Fokas Method for Heterogeneous Reaction-Diffusion Brain Tumor Models that Incorporate Radiotherapy and Chemotherapy", extended version - submitted
- Α. Φωκάς, Α. Χειμωνάς και Δ. Μαντζαβίνος, "The non-linear Schrödinger equation on the half-line", Transactions of the American Mathematical Society (accepted)

Τέλος ...

The End !!!